Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academia OXONIENSI,

789/25

OPERUM

MATHEMATICORUM

Pars Altera:

Qua Continentur

De Angulo Contactus & Semicirculi, Disquisitio Geometrica:

De Sectionibus Conicis Tractatus.

Arithmetica Infinitorum: sive de Curvilineorum quadraturâ, &c.

Ecclipseos Solaris Observatio.

OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,

Veneunt apud OCTAV. PULLEIN *Lond. Bibl.* 1656.

DR. D. WILLIAMS'S LIBRARY
RED CROSS STREET
LONDON.

AD LECTOREM.

NOn multa sunt (Erudite Lector) quibus te in limine morabor. Statueram apud me, cum his quos habes, tractatus alios aliquot emisisse; adeoq; huic parti aliam vel conjunxisse vel potius præmisisse; quam quidem eodem circitèr tempore inceperant Typographi quo præsentem. Sed cum viderim operarum moras majores esse quam speraveram, mallem (amicis id desiderantibus) hanc quam absolverant partem in antecessum emittere; quam secutura est altera cumprimum per Typographos licebit. Interim, his fruere: quibus, si Arithmeticæ (ut loquuntur) Speciosæ, seu Symbolicæ, assuetus sis, haud (spero) admodum hærebis, cum ego omnia qua potui perspicuitate tradere sim conatus; sin ea adhuc caruęris, poteris vel ex Oughtredi *Clavi Mathematicæ*, vel Schotenii *Principiis Matheseos Universalis*, eam tibi familiarem reddere; vel, nisi prius id feceris, ex iis quæ nos brevi (favente Deo) sumus edituri.

Errores quod attinet Typographicos, sunt quidem illi (si insuetum Typographis nostris operis genus, & calculi multiplicitatem, spectes) non adeo multi, nec quidem plures (fortasse etiam pauciores) quam in minoris difficultatis libris solent occurrere; quos observavimus tamen, qui alicujus sint momenti, notare mallem quam (quod solent multi) dissimulare; ut eos (& siquos alios ipse deprehenderis) calamo emendes.

Ang: Contact: p. 15. l. 16. *Geometricè* p 30 l: 1 *Si enim peripheria EA*, p 32 l: 15 *planæ*: p 45 l: ult: *BCA, BA*. p 48 l 9 *tamen*, p 50 l 7 *puncto P*.

Con: Sect: p 23 marg: *non sep-* p 32 l 23 *ansam*, p 38 l 7 *id* — p 40 l 1 *hujus*, p 52 l 17 $\frac{4d^2 \mp 4da + a^2}{4d^2}\ p^2 - \frac{d \mp a}{d}\ p^2$. p 53 l 19 *aF*, p 54 l pen: *rectam*. p 55 l 12 *PF. Pa* : : p 59 l 8 *quotlibet*, p 64 l pen: $t = \frac{d^2 l}{dl - c^2}$ p 66 l 11 *a centro* p 68 l ult: *transversæ*, p 69 l 22 $t - d \mp a$, p 71 l 27 A a, p 73 l 3 c. d

c.d::x, l pen: $\pm 2\sigma\gamma dxcq$, p 74 l ult: $\frac{\sqrt{\delta\xi}dx}{\sigma}$, p 75 l 1 $\pm\delta\xi c^2 \pm 2\gamma\sqrt{\delta\xi}dx$ l 5, $e^2 = DQq$, p 75 l 15 *sunt et*, p 83 l 8 d^2: *Horum*, l 19 $t = \frac{d^2 l}{h^2 - dl}$, p 86 l 13 $f^2 a^2 \pm f^2 ta$, l 14 $\pm f^2 a + f^2 t$, p 87 l 4 HA.HF, p 91 l $\delta^2 c^2$, l 4 $2\sigma + \delta = \zeta$, ib $\pm 2\sigma\gamma cq$, p 92 l 16 DA.Da, l 18 $\frac{\gamma dz}{\sigma c}$, l 19 $\sqrt{\delta\zeta}dz$, l 20 $\pm 2\gamma c\sqrt{}$, p 93 l 1 $\delta\zeta^2 \pm 2\gamma c\sqrt{}$, l 4 *sunt pun-* l 12 *hyper-* l 24, 25 CHa p 94 l 4 *prop*: 32, p 103 l 21 *supponuntur*, p 106 l 21 $3f^2 da\gamma$, p 109 l 21 $\pm pD$, l 29, 30, $9dq^2$, p 111 l 24 *est Diam*.

Arithm: Infin: p 16 l 15 *maximæ*; l 23 l^2, l 26 *subtriplam*, p 23 marg: *prop*: 24, p 27 l 26 *vero continentia*, p 33 l 26 *maxime*, p 34 l 27 *primo* 0, *secundo* 1, lin 29 $+ \frac{n}{12 l^2}$, lin: 30 $- \frac{1}{12} nl^2$, p 35 l 8 *prop*. 182, p 36 l 15 *seriem*, p 38 l 19 *habeat*, p 49 l 5 *pyramidoidea*, p 70 l 16 *divisor*, p 77 l 18 ADββ lin: ult: *huic*, p 78 l pen: *radicum*, p 79 l 22 *sub ecundanis*, p 83 l 6 *acuto*, p 87 l 20 $1 + \frac{4}{5}^2 = \frac{9}{5}$, p 89 l ult: *vel* $\frac{2}{3}$, p 91 l 14 $R^2 + 2aR + a^2$, l 22 dele *prop*: 121, p 93 l ult: a^2, p 93 l 3 ADβ p 97 tab: l 1, 120, l 3, 58240, l 4, 9945, l 5 1056, p 98 l 6 $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \times \frac{3a+1}{3a}$, p 99 tab: l 3, 29160, l 4, 45, & 122880, p 100 l 9 + + + + + +, p 103 tab: l 3, 1 + 3, l 4, 1 + 4, p 107 l 15, $2aD + a^2$, l 17 $+ a^4$ & $- a^4$, l 25 *maximo*, p 108 l 8 *lipsem*, l 15 $4aD - 16a^2$, l 19, *ductam*, p 112 l 14 *rectas Trianguli inscripti*, l 7 $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13}$ p 113 l 4, $- \frac{1}{13} = \frac{81}{182}$, AD^{12}, l 5, $4 \times 7 \times 10 \times 13$, p 114 tab: l ult, $4 \times 11 \times 18 \times 25$, p 118 l 18, $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$, p 124 l 17, $+ \frac{3}{5} + \frac{1}{7}$, p 125, l 5 $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, l 15, $+ \frac{9}{5} + \frac{3}{6}$, p 127 l 16, $\frac{1}{2}$ ADT $\times \frac{1}{3}$ AD^2, p 129 l 8 *habeat*, p 131 l 13, $10\sqrt{3}$, p 132 l 5, 6, *ad* 7 × 6, p 133 l ult: $\frac{1}{6}$, p 136 l 31 *qui in secunda, laterales; qui in tertia*. p 147 l 16 *triangularium*, p 148 l 2, 720, p 152 l 32, $\frac{1}{\infty}$ B, *erit*, p 162 tab: l ult: 15, 23, & 70, p 163 l 1 *expeditius*, p 165 l 15 *meminimus, nempe*, p 177 l 27 *calcatos*, p 184 l 1, 4Fq + 8F, lin: 7, 649 Fq.

Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,

DE ANGVLO CONTACTVS ET SEMICIRCULI

Disquisitio Geometrica.

OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Veneunt apud *Octav. Pullein*, Lond: Bibl. *Anno* 1656.

Insignissimis Viris

D. BENJAMINO WHICHCOTO, S. T. D.
Collegii Regalis Cantabrigiæ Præposito;

D. THOMÆ HORTONO, S. T. D.
Collegii Reginalis ibidem Præsidi;

D. ANTHONIO BURGESIO, Rectori Ecclesiæ *Suttonensis* in Agro *Warwicensi*.

JOHANNES WALLIS *Geom. Prof.*
SAVILIANUS Oxoniæ. S.

CUm, supremo sic favente Numine, (Insignissimi Viri) prima studiorum Academicorum principia me posuisse contigerit in florentissimo Collegio, Emanuelis *dicto*, Cantabrigiæ, *cui vos Consocii (cum aliis dignissimis doctissimisq; Viris) regendo tunc temporis præfuistis; & quidem sub vestra omnium successive peculiari tutela; istius ego & loci & temporis & personarum mihi omnino recordandum esse censeo: (Quippe ingrati ratus, unde & a quibus quis profecerit, obliviscì:) Adeoq; hoc opusculum, utut exiguum, grati tamen animi testimonium, vestris inscribendum nominibus.*

Quam felix prosperumq; hactenus fuerit Emanuelis *illud Collegium, ab Honoratissimo Equite* GUALTERO MILDMAIO *prudentissimo piissimoq; Viro (*ELIZABETHÆ, *tunc Angliæ Reginæ, a Privatis Consiliis,) annis abhinc septuaginta circiter, feliciter & auspicato fundatum; non est quod ego, vestris præsertim auribus, multis exponam. Id saltem ausim dicere, (quod*

nec

nec quemquam negaturum autumo,) vix ullum utriusvis Academiæ Collegium, pari tempore, majori tum pietate tum doctrina floruisse, pluresve in messem Dei fideles sedulosq; operarios immisisse; indeq; haud facile est dictu, quanta Deo seges accreverit, quantum pietatis efficacis incrementum. Argumento esse potest nuperus Theologorum Conventus Westmonasterienſis, authoritate Parliamenti ex variis Angliæ partibus undicunq; convocatus, doctissimis, prudentissimis, & vere piis Theologis refertissimus, (qualem ego, nescio numquis alius, si doctrinam pariter & conjunctam pietatem spectemus, nec similem unquam vidi, nescio an visurus;) quorum præterpropter pars tertia ex hoc uno Collegio aliquando prodierant; quippe, ex centum circiter Theologis, plures quam triginta Emanuelis *fuerant Collegio enutriti cum tamen Collegiorum & Aularum utriusq; Academiæ numerus quadragenarium superet. Simili argumento est, quod, præter ingentem eruditorum numerum, hinc, tanquam ex refertissimo alveario, ad curas partim pastorales, partim ad alia utriusq; Academiæ Collegia, promotionis ergô, abunde transmissorum, etiam nunc temporis (Anno 1655 currente) ex sexdecim totidem Collegiorum Ædiumve Præfectis* Cantabrigiæ, *undecim ex hoc uno* Emanuelis *Collegio prodierunt. Quæ omnia nonnisi peculiari Numinis benedictioni in fundationem illam sincero animo positam referenda sunt, cum non aliàs huic adsint præ Collegiis aliis incitamenta ulla vel emolumenta, quibus illa videantur attribuenda. Cæterum Deus Optimus Maximus & florentissimam illam societatem, (cujus vos olim pars fuistis, & etiamnum estis ornamenta,) & vos item, vestraq; omnia feliciter sospitet, promoveatq;, in suam ipsius gloriam, vestrum ipsorum commodum, & totius Ecclesiæ incrementum.*

De Angulo Contactûs, & Semicirculi, Disquisitio Geometrica.

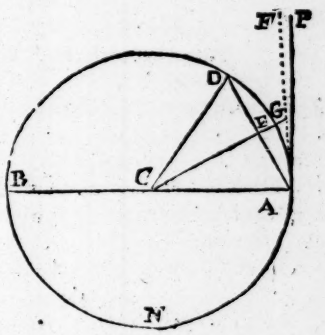
CAP. I.

Ansa & status Controversiæ.

QUoniam illi, quæ sequitur, Controversiæ ansam dedit Propositio 16ª Libri 3ⁱ Euclidis; illam integram primùm apponendam duxi, ejusq; demonstrationis summam.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν ἡμικυκλίου γωνία, παντὸς ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

"Quæ circuli diametro (AB) ad angulos rectos ab extre-
"mitate ducitur recta (A P)
"cadit extra circulum. 2. Et
"in locum qui inter rectam
"(A P) & peripheriam
"(DEA) interjicitur, altera
"recta (ut FA) non cadet:
"3. Et Semicirculi angulus
"(EAC) major est omni
"angulo acuto rectilineo:
"4. Reliquus autem (EAP)
"minor.



"Nam 1° si caderet per-
"pendicularis illa intra cir-
"culum, ut AD (vel etiam
"si jaceret in ipsa periphe-
"riâ) essent anguli DAC,
"ADC, æquales, per 5ᵉ1, ideoq; uterq; rectus; contra 17ᵉ1.
"2° Si recta FA (inter peripheriam & perpendicularem PA)

cadere

" cadere possit, ducatur ad illam perpendicularis ex centro
" CEG; quoniam igitur angulus rectus CGA major est acuto
" CAF (ut qui pars est recti CAP,) esset, per 19 e 1, latus CG
" minus quam CA, hoc est, minus quam CE, pars sui. Pars
" 3ª & 4ª sequuntur ex secundâ.

Occasione sumpta ab hac Euclidis Propositione, gravis orta est controversia (quod mirum est, in re pure Geometrica,) inter Peletarium & Clavium; quæ, quod sciam, nondum unanimi Mathematicorum consensu determinationem nacta est.

Primus, quod sciam, Peletarius asserit, *Angulum* qui dicitur *Contactus*, seu contingentiæ, non esse revera *Angulum*, nec omnino *Quantitatem*; sed Rectam, quæ Circulum tangit, cum Peripheria coincidere, non autem ad illam inclinari; Angulum autem Semicirculi omnino Rectum esse, & recto rectilineo æqualem.

Contra, Clavius asserit, illum vere Angulum esse, & quidem quantitatem in infinitum divisibilem, non quidem per lineam rectam, at saltem per Peripheriam majoris circuli; minorem tamen quàm est ullus rectilineus possibilis: Angulum verò Semicirculi minorem esse angulo recto rectilineo, majorem tamen quovis rectilineo acuto.

CAP. II.

Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse.

ILLud autem ego primum præmonendum esse judico: Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse, (quanquam ex illius principiis dirimi posse non dubitem.) Probat enim Euclides, & recte quidem, Angulum semicirculi majorem esse omni Acuto rectilineo; an verò sit Recto rectilineo vel minor vel æqualis, non dicit: utrumvis autem dicatur, manet Euclidéi dicti veritas, modò non sit acuto minor: Item, Angulum contactûs (nempe siquis sit) minorem esse omni rectilineo, quia scilicet nec æqualis, nec major est; at verò, an sit omnino quantitas necne, non dicit; nec quidem, si dixisset, posset allata demonstratio id confirmare: nam & illud quod asserit verum manet, etiamsi supposítus ille angulus contactûs nihil sit; quod enim omnino nihil est, est certè omni positivâ quantitate minus.

Si

Si verò voluiſſet Euclides affirmâſſe, Angulum ſemicirculi minorem quidem eſſe quàm eſt rectus rectilineus, majorem autem quovis acuto rectilineo; oportuiſſet illum utrumq; membrum probaſſe: nempe, non modo angulum ſemicirculi majorem eſſe omni acuto rectilineo (quod quidem verum eſt de recto rectilineo, aut etiam obtuſo;) ſed & minorem recto eſſe; hoc autem nec probat Euclides, nec quidem omnino aſſerit. Et ſimiliter de Angulo Contactus; ſi affirmâſſe voluiſſet, Angulum qui dicitur Contactûs, verè quidem Angulum eſſe, & reverâ Quantum, minorem tamen omni acuto rectilineo; oportuiſſet utrumq; membrum probaſſe. At ille ſolummodo probat, Angulum contactus ſaltem minorem omni angulo rectilineo; an verò ſit revera Quantum necne, nec probat, nec affirmat, ſed prorſus ſilet. Non autem putandus eſt Euclides, acutiſſimus demonſtrator, qui ne ullum paralogiſmum uſquam admiſit, (fatente ipſo Ramo, qui tamen fatetur ſe dedita operâ illud quæſiviſſe, quíq;, ut notum eſt, ſat ſeverus, nequid gravius dicam, in Euclidem judex erat,) non putandus, inquam, eſt Euclides, tantam παρεξιαν admittere voluiſſe, ut ubi duo ſat diſtincta propoſitionis membra (vel, ſi placet, duas propoſitiones) affirmâre voluerit, non niſi ipſorum unum demonſtraret.

At vero, quanquam Euclides neutrum horum dixerit, nempe, nec angulum ſemicirculi minorem eſſe recto rectilineo, nec etiam angulum contactus eſſe revera quantum, oppoſitam tamen opinionem, quamvis fortaſſe non verbis Euclidis, ipſius tamen ſententiæ contrariam eſſe, contendit Clavius. *Si enim*, inquit, *Euclides ſenſiſſet angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: quid, obſecro, tantopere deſudâſſet, ut demonſtraret angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi majorem? Quid enim clarius, quàm, Nihil, cujuſmodi eſt angulus contactus ex Peletarii ſententia, minus eſſe quocunq; angulo? Quid quæſo magis perſpicuum, quàm, angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, majorem eſſe quolibet acuto?*

Verùm ego, quæ eſſet Euclidis hac in re ſententia, non obſtante hoc Clavii ratiocinio, fateor me non ſatis aſſequi. Euclides certè, quod ſciam, ſuam hac de re ſententiam nuſquam profert. Illam vero ex Clavii ratiocinio ſatis pateſcere prorſus nego. Certum enim eſt, Euclidem aliquando minus aſſere-

re, quàm & asserere potuisset, & ipse senserit; sive quod nondum opus esset totum quod senserit producendi, sive quod nondum ex prædemonstratis commodè ostendi posset, sive alia forsan aliquando de causa. Exempli loco sint propositiones 16ª & 17ª primi. Prop. 16. sic est, *Trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno & opposito major est.* An verò ex hac propositionis forma dicendum est (juxta quod Clavius hic arguit de angulo contactûs) *Si Euclides sensisset angulum externum æqualem esse duobus internis oppositis simul sumptis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret utrovis majorem esse? quid enim clarius est, quàm, quod duobus simul sumptis est æquale, eorum utrovis sigillatim majus esse?* Prop. 17ª hæc est, *Trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores omnifariam sumpti:* At (juxta Clavii ratiocinium) *Si Euclides sensisset, tres simul angulos æquari duobus rectis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret, eorum duos minores esse duobus rectis? quid enim magis perspicuum, quàm, quod tribus simul æquale est, eorum duobus esse majus?* An autem hinc concludere licet, vel, Angulum externum non esse æqualem duobus internis oppositis simul sumptis? vel, Tres angulos trianguli rectilinei non esse æquales duobus rectis? vel, Euclidem non ita sensisse? Nullo modo; nam & ea utraq; sic esse, & Euclidem illud non ignorasse, liquet ex 32 e 1. ubi illa & affirmantur & demonstrantur. Sed & etiamsi propositio hæc 32ª deesset, non tamen essent 16ª & 17ª vel minus veræ, vel minùs legitimè demonstratæ: verum quidem esset, Euclidem ea de re sententiam suam minus exposuisse. Pariter & de 16 e 3 dicendum est. Affirmat scilicet Euclides, Angulum semicirculi majorem esse quolibet acuto rectilineo, Angulum verò contactus quolibet acuto rectilineo minorem: quod autem attinet ad controversiam Peletarium inter & Clavium, prorsus tacet, neque suam sententiam omnino exponit; angulum nempe semicirculi recto rectilineo æqualem, neq; ait, neq; negat; angulum item contactus neq; negat, neq; affirmat, verè quantum esse.

Sed & eodem modo abstinet in 31 e 3 (ubi tamen locus esset opportunus suam ea de re sententiam proferendi:) affirmat enim, " *Angulum in semicirculo, rectum esse; in segmento majori, mino-*
" *rem recto; in minori segmento, majorem; item Angulum majoris seg-*
" *menti majorem recto; minoris, minorem;* angulus autem *semicirculi* quantus sit (quamvis illud statim exspectandum esset) non di-

cit

cit, ſed cautè abſtinet, ſive quod ipſi forſan vix conſtiterit quid erat dicendum, ſive quod non præſto fuerit demonſtratio quâ ſuam ſententiam confirmet. Sed & veteres (quod ſciam) omnes (præter unum Proclum) câ de re prorſus tacent.

Non diffiteor quidem Recentiorum aliquot, magnos viros, & ex veteribus fortaſſe nonnullos (ſaltem Proclum) de angulo contactus ita loquutos eſſe, acſi haberet anguli quantitatem; adeóq; de angulo ſemicirculi tanquam minori quàm eſt angulus rectus rectilineus. Sed argumentis hac in re agendum eſt, non authoritatibus: præſertim cùm ex veteribus nemo, quod ſciam, quidquam hac in re demonſtraſſe repertus ſit.

CAP. III.

Anguli Plani natura & definitio explicantur.

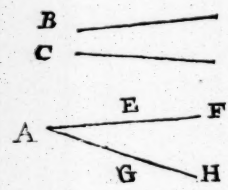
VT rem igitur controverſam intimiùs aggrediar, inchoandum erit a natura *Anguli plani*; quem Euclides ſic definit 8 d 1. "*Angulus planus eſt mutua κλίσις, ſeu inclinatio, duarum linearum in plano ſeſe tangentium* (ἁπτομένων) *& non in directum poſitarum.*

Peletarius hanc definitionem paulò immutatam mallet; ut nempe de linearum mutuo ſeſe *ſecantium* concurſu tantùm intelligatur. Verùm nulla neceſſitas cogit hujuſmodi mutationem fieri. Quamvis enim, juxta Peletarium, ſolas illas lineas angulum continere, dicendum ſit, quæ, ſi producantur, ſe mutuo ſecabunt: non tamen minùs verum erit, juxta eadem principia, eaſdem ſolùm lineas mutuò inclinatas concurrere: quæ enim ſuadent, circumferentiam cum recta contingente angulum non continere; eadem etiam ſuadebunt, has lineas mutuò inclinatas non eſſe: Ita ut non ſit opus, ob hanc ſententiam, Euclidis definitionem mutare.

In Euclidis verò definitione, notandum eſt primò, duarum linearum mutuam κλίσιν, ſeu inclinationem ad invicem, requiri. Ideóq; ſi quæ lineæ concurrant, nec tamen inclinentur ad invicem, angulum non conſtituent, quia nempe angulus, ex definitione, eſt linearum mutua inclinatio.

Deinde vero, non quævis linearum inclinatio, Angulus dicitur: ſed linearum concurrentium, ſive ſe mutuo tangenti-

un ἀπλουέων· (nam ἄπλους apud Euclidem dicitur de quocunq; recta, seu concurrentia; at ἐφάπτεσθαι de contactu κατ' ἐξοχήν, qualis definitur 2 & 3 d 13.) Quamvis enim lineæ distantes in eodem plano, inclinari ad invicem dici possint, ut B, C; non tamen angulum constituunt, nisi concurrant.



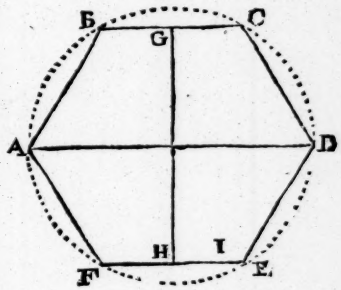
Et quidem ipsæ concurrentes lineæ, quamvis totæ forsan inclinentur ad invicem; angulū tamen non alibi quam in ipso puncto concursus formant. Verbi gratia, lineæ AF pars quælibet ad lineam AH inclinatur; at non harum linearum pártes quælibet, puta EF, GH, angulum formant; sed earum tantum extrema, in communi puncto A concurrentia: Et quidem quantacunq; utriusvis pars alia abscindatur, modo tantillum supersit ut concursus conservetur, angulus omnino invariatus manet; idem enim omnino angulus est qui cruribus AF, AH, & qui cruribus AE, AG, continetur.

Non igitur ex linearum concurrentium inclinatione qualibet, judicatur Angulus, (si nempe ita se habeant lineæ concurrentes, ut hic magis, illic minùs inclinentur,) sed ex illa quam sortiuntur inclinatione in ipso concursus puncto. Ideoq; angulus, quem facit perimeter Hexagoni ABCDEF cum recta AD, non æstimandus est ex quacunq; inclinatione quam habet perimeter in quacunq; sui parte ad rectam AD (puta in parte BC) sed ex ea quam habet in punctis concursus A, D: sic angulus, quem facit cum recta GH, non ex inclinatione quam ubivis habet perimeter ad illā rectam, (putà quam habet in partibus AB, vel ED) sed quam habet in ipsis punctis concursus G, H.

Et quamvis dici possit, Perimetrum Hexagoni descripti, non esse lineam unam, sed ex variis (puta AB, BC, CD, DE, EF, FA,) aggregatam; ideoq; fallaciam πολυζητήσεως committi, si de inclinatione ejusmodi perimetri ad rectam quæratur: Idem tamen omnino eveniret, si, pro perimetro figuræ rectilineæ, ponatur peripheria, vel alia linea curva; cujus inclinatio ad quamvis rectam propositam non eadem manet (prout in rectis fieri solet,) sed in singulis punctis variatur, quamvis interim linea

isthæc

iſthæc curva pro unica linea habeatur. Non enim peripheriæ ſegmentum BC (aut quodlibet ipſius punctum) eandem inclinationem habet ad rectam AD, quam habet ipſius peripheriæ ſegmentum AB (aut quodvis ipſius punctum,) ad eandem rectam: Patet enim, ipſius ſegmenti BC ſitum magis ad parallelilſmum accedere, at ſegmenti AB propius ad perpendiculum: Angulus autem quem facit ea peripheria cum Diametro AD, non æſtimandus eſt ſecundum inclinationem ſegmenti BC (aut alicujus in eo particulæ) ſed ſecundum illam quam habet perimeter in ſui particula contigua, ſeu potius in ipſo puncto concurſus.



Deniq; , additur in illa definitione Euclidea, phraſis hæc, *μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, non in directum poſitarum*: unde innuitur, lineas in directum poſitas angulum non comprehendere. Non autem vult Euclides, per *lineas in directum poſitas*, lineas tantummodo rectas continuatas, ſive duo ſegmenta contigua ejuſdem rectæ: ſic enim continuata peripheria, in ſingulis ſui punctis, angulum formare dicenda eſſet, quod tamen nec Euclides, nec alii ſolent affirmare: Sed, per *lineas in directum poſitas*, eas intelligit, quæ ſeſe mutuo continuare dici poſſunt, ut exinde una linea fiat. Atq; hactenus Anguli plani naturam, quantum opus videtur, explicavi.

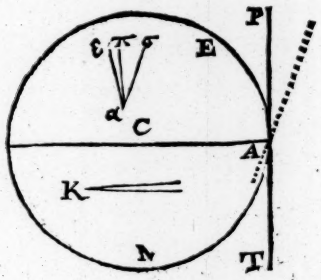
CAP. IV.

Argumentum primum, ab Anguli plani natura petitum.

His prælibatis, videamus quid in hac controverſia utrinq; dici poteſt.

Qui angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem aſſerunt, nituntur

Nituntur communi huic notioni, *Totum est majus sua parte*, vel, pars toto minor. At, inquiunt, semicirculi Angulus C A E, est pars anguli recti rectilinei C A P; ergo est recto minor; &c



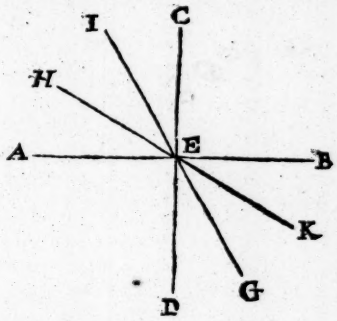
quidem tanto minor quantus est angulus interjectus E A P, qui est angulus contactus.

Peletarius contra, negat angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, aut recti partem esse, sed toti recto æqualem; quia scilicet angulus contactûs (qui auferri supponitur ex recto, ut restet angulus semicirculi) est non-angulus, ejusq; quantitas nulla: at qui aufert angulum tantummodo imaginarium, ille nihil aufert, & ejusmodi imaginaria ablatione quantitas non omnino minuitur, sed eadem, quæ prius erat, invariata manet.

Cardo igitur controversiæ hic est, An qui dicitur Angulus contactûs sit verè Angulus, verámq; anguli quantitatem habeat, ut vult Clavius; vel revera non-angulus, ut vult Peletarius, sed tantum angulus imaginarius, qui veram anguli quantitatem nullam habeat.

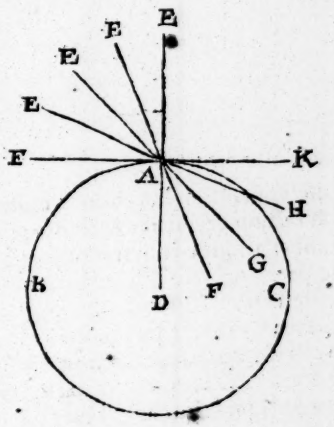
Ut hoc explicatius daret *Peletarius*, hujusmodi diagramma proponit. Duabus rectis A B, C D, se mutuo secantibus in puncto E ad angulos rectos; si intelligatur recta C D, puncto E fixo, circumvolvi, ubi pervenerit ad situm F G, ex angulis rectis fiunt obliqui (hinc acuti, illinc obtusi,) qui fient adhuc magis

magis obliqui cum perventum erit ad ſitum HK, & ſic deinceps, donec perveniatur ad AB; tunc enim ceſſabit interſectio,



& ſimul angulus evaneſcet, quoniam non jam ad rectam AB inclinabitur, ſed in ipſa jacebit immerſa.

Neq; ſecus, inquit, eſt in curvo. Si enim DE, recta per centrum, peripheriam BAC ſecans in puncto A, ſuper eo circumducatur per puncta FGH, fient anguli continuè varii cum peripheriâ, donec, ceſſante ſectione, linea ED facta ſit EK, ac tangat circulum. Atq; jam linea ED vel EK non inclinata intelligitur, ſed immerſa in ipſa BAC peripheriâ, quantum ad angulum attinet, non aliter quam ſi ipſa BAC eſſet linea recta.

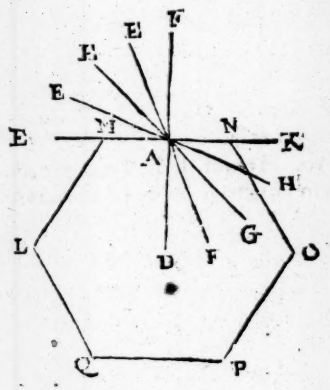


Illud, credo, vult Peletarius; Rectam ED, cum perventum eſt ad ſitum EK, (ubi deſinit peripheriam ſecare, & facta eſt

C tangens,

tangens,) non jam inclinari ad peripheriam, sed super ipsam ἀκλινῶς jacere, & cum ipsa coincidere, eousq; scilicet dum peripheria supponitur eandem inclinationem retinere quam habuit in ipso puncto A: Quòd autem postea quasi resiliat peripheria a recta E K, ideo factum est, quia peripheria suam inclinationem (ut et aliæ curvæ) subinde per singula puncta mutat, adeóq; ipsius inclinatio, quæ in puncto A nulla erat, quum primum ab eo puncto recessum est fit aliqua, quæ & deinceps continuò variatur, omnésq; possibiles variationes admittit.

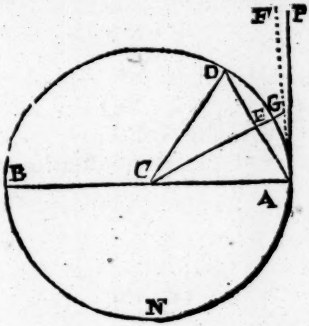
Hoc autem fortasse meliùs concipietur, si, pro circuli peripheria, substituamus figuræ rectilineæ perimetrum: si igitur D E, perimetrum Hexagoni secans ad angulos rectos in puncto A, super illo circumducatur per puncta F, G, H, angulos continuo magis obliquos faciet usq; dum ad situm E K perveniat, hic enim cessat sectio, & evanescit angulus: ipsa enim E K in Hexagoni perimetro ἀκλινῶς jacet, & cum ipsa coincidit; non tamen cum tota perimetro, (neq; quidem ipsa tota, si saltem producatur,) sed cum ista perimetri parte M N quæ eandem retinet inclinationem quæ fuit in puncto A; at vero quum primum perimeter suam inclinationem mutat, in punctis M, N, deserit statim rectam perimeter & ab illa resilit, suamq; subinde inclinationem aliquoties mutat in punctis O, P, Q, L: adeóq; inclinatio perimetri respectu rectæ tangentis E K, quæ in puncto A nulla erat, fit subinde alia atq; alia. Quæ autem in figura rectilinea contingit inclinationis in singulis lateribus variatio, ea in circulo contingit in singulis punctis: unde recta E K, quæ figuram rectilineam contingit per integrum latus M N, (cum quo nullum igitur angulum facit,) eadem circulum non contingit



tingit nisi in unico puncto, ipsiq; soli ἀκλινῶς coincidit, adeóq; angulum non facit. Atq; ita sententiam Peletarii, quanta potui perspicuitate, proposui.

His ita explicatis, hoc modo licebit argumentum formare. Ubi linearum concurrentium nulla est inclinatio, (sive propter coincidentiam illud fiat, sive propter continuationem) ibi nullus est angulus, (est enim angulus mutua concurrentium inclinatio, per 8 d 1.) at circumferentiæ ad rectam tangentem, in puncto contactûs, nulla est inclinatio, (ut ex præexplicatis patet;) ergo nullus ab ipsis fit angulus. Angulus igitur, qui Contactûs dicitur, est angulus tantùm imaginarius, non vere angulus. Quod erat ostendendum.

Ad ulteriorem confirmationem minoris propositionis in hoc argumento, præter ea quæ jam dicta sunt, poterit & hoc, si o-



pus sit, breviter adjungi. Si circumducta semi diameter CB, circa centrum C, extremo suo puncto B, describat peripheriam BEAN; punctum B motu suo ante contactum in puncto A verget ad rectam tangentem AP, post contactum ab illa resilit, at in ipso contactûs puncto indifferenter se habet ad utrumq;, nec approximat enim nec elongatur, sed neq; rectam tranſit, continuatur tamen uniformiter motus: At motus invariatus, qui ad assignatam in eodem plano rectam neq; accedat, neq; ab ea recedat, neq; tamen transeat, quo pacto inclinatus dici possit, non video; (neq; enim versum inclinat, neq; retrorsum, nec tamen

men transit,) vel enim propter linearum coincidentiam, vel saltem paralleliſmum, fieri dicendum erit.

Qui autem ſecus ſentiunt, idem videntur affirmare, (ut familiari utar inſtantia,) acſi dicerent, ambulantem in circulo Horizontali a puncto Meridionali N (ubi Orientem verſus ſpectat) donec continuato itinere per punctum Orientale A, ad puncta E, D, perveniat (ubi Occidentem verſus ſpectat,) nec tamen interim unquã directè ſpectet Septentrionẽ. Nam ſiquando directe ſpectet Septentrionẽ, erit certe cũ in puncto A exiſtit, (prius enim aſpectus ad Orientem declinat, poſtea verò ad Occidentem) ſi verò in puncto A directe ſpectet ſeptentrionẽ, (neq; ad Orientem neq; ad Occidentem declinans,) erit certe in illo puncto A tendentia circuli (cujus ductum ſequitur incedens) verſus punctum P, (nam recta A P erit linea meridionalis, ut quæ lineam Orientis & Occidentis A B tranſverſim ſecat ad angulos rectos,) adeóq; in illo puncto eadem erit tendentia tam circumferentiæ quàm rectæ tangentis; nullus igitur angulus, ſed linearum coincidentia.

Vide figuram paginæ præcedentis.

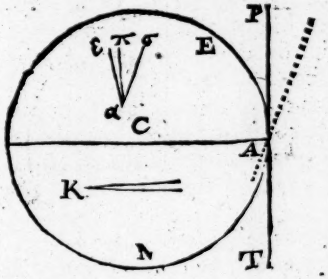
Sed, quoniam ſententia iſthæc Peletarii ægriùs antehac aſſenſum invenit: Præter ea quæ dicta ſunt, quæ quidem veram & genuinam rei cauſam videntur continere, adeóq; a priori demonſtrare; Alias adhuc aliquot demonſtrationes ad ungendas duxi, partim a Peletario allatas, partim a me additas. Non quòd velim ſingula quæ inter Peletarium & Clavium agitantur examinare; quæ ſcilicet vel minùs caute ab hoc aut illo efferuntur, aut ad hominem dicta ſunt, potiùs quam ad rem; ſed ea ſolùm quæ argumentorum vires exhibent, ipſámq; rem controverſiam propius attingunt.

CAP.

CAP. V.

Argumentum secundum; Ubi, de Angulorum ὁμογενείᾳ.

PEletarii argumentum primum, quo assensum cogere conatur, & cui præcipuas vires attribuit, est ἀπαγωγὴ, seu deductio ad absurdum, sive impossibile: nititur autem propositioni primæ decimi Euclidis, quæ hæc est, *Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, si a majori auferatur majus quam dimidium, & item a residuo majus quam dimidium, id q; continuè fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua minor magnitudine minore proposita.* Unde concludit Peletarius, quòd, si angulus contactus E A P, & rectilineus K, sint propositæ quantitates inæquales, sitq; angulus



rectilineus angulo contactûs major; si ab angulo rectilineo auferatur (vel semissis, vel) plusquam semissis, & deinde residui (semissis, aut) plusquam semissis, & sic deinceps; tandem relinquetur angulus rectilineus (nempe, si sectiones rectis lineis fiebant) angulo contactûs minor: At hoc fieri non posse demonstravit Euclides 16 e 3. Non sunt igitur angulus contactûs & rectilineus duæ inæquales quantitates (ut supponebatur;) sed eorum alter non quantitas. Angulus igitur contactûs (nam de rectilineo non est quæstio) est non-quantus, sive non-angulus; quod erat ostendendum.

Atq; eodem modo arguere licebit ex 2ª primi Archimedis,

de Sphærâ & Cylindro: quæ propositio hæc est, *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus, possibile est duas rectas describere, quarum minor ad majorem, rationem habebit minorem, quàm habet magnitudo minor ad majorem.* Si autem possibiles sint duæ rectæ lineæ, quarum hæc ad illam minorem rationem habebit, quam habet angulus contactûs, ad rectilineum (quod omnino dicendum est, per hanc Propositionem, si angulus contactus sit vere quantitas,) certe angulus contactûs non erit omni angulo rectilineo possibili minor: quum possit angulus rectilineus in infinitum dividi, per 9 e 1, non minus quàm recta linea.

Sed & Euclides, & Archimedes, passim hoc assumunt in demonstrationibus quasi per se notum, & postulandum; *quantitatem minorem toties multiplicari posse ut quamvis assignatam majorem superet.* Ergo, & angulus contactûs (si saltem sit omnino quantus) toties multiplicari potest, ut angulum quemvis rectilineum superet; non esset igitur (quod tamen esse demonstravit Euclides) omni possibili rectilineo minor.

Quid autem Clavius ad hæc? Nempe ait, Propositionem illam Euclidis intelligi de illis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis, & quarum utravis multiplicata alteram excedere possit; quod de angulo contactus & rectilineo dici non potest, cùm angulus contactûs quamtumvis multiplicatus angulum rectilineum superare nequeat. (Atq; idem, credo, dicturus esset de memorata propositione Archimedis, si illam adduxisset Peletarius.) Magnitudines autem illas, quarum altera multiplicata reliquam superare nequit, non censendas esse, ait, ejusdem generis, quod ad proportionem attinet, licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur.

Quibus ego hæc habeo quæ regeram.

1° Fatendum est propositiones illas, & quidem omnes alias ubi de proportionibus agitur, intelligendas esse de quantitatibus tantum homogeneis. Neq; enim Peletarius, nec, credo, quisquam alius, Quantitates Heterogeneas sic comparari posse diceret. Quis enim unquam affirmavit, Anguli ad Superficiem, Numeri ad Magnitudinem, Lineæ ad Solidum, ullam rationem esse? Aut quidem Heterogeneorum unum altero vel majus esse, vel minus, vel ipsi æquale? Vel etiam addi aut subduci posse? Nam quantitates Heterogeneæ, non modò sunt ἀσύμμετροι, (quod

&

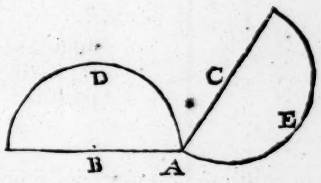
& inter Homogeneas etiam non rarò accidit, ut ex Decimo Euclidis manifeſtum eſt,) ſed & plane ἀσύμβλητοι. Atq; illud ſatis innuit Euclides in *Rationis* definitione, 5 d 5, quum ait eſſe, *duarum magnitudinum* (ὁμογενῶν) *ejuſdem generis, mutuam quandam ſecundum quantitatem habitudinem.*

Verùm 2°. Dico ego omnes omnino angulos planos, ſive rectilinei ſint, ſive curvilinei, ſive miſti, Homogeneos eſſe, & quidem quamcunq; rationem ad alios aſſignandos ſubire poſſe; ſive æqualitatis, ſive inæqualitatis, rationalis, ſive irrationalis. Quid enim impedit quo minùs ita ſe res habeat? aut quidnam illud eſt unde hanc ἑτερογένειαν oriri ſupponamus?

De Angulis Rectilineis inter ſe, rès eſt in confeſso: nemo enim unquam dubitavit angulos rectilineos in quàvis poſſibili ratione fieri poſſe? quamvis revera nondum methodus conſtet, (neq; forſan unquam conſtabit,) qua poſſimus datum angulum rectilineum in data ratione (Geometrici) ſecare.

De Angulis item curvilineis, rem etiam non negandam exiſtimo: poſſunt enim curvilinei ad invicem vel æquales aſſignari, vel inæquales. Atq; idem etiam, de angulis miſtis inter ſe, dici poterit.

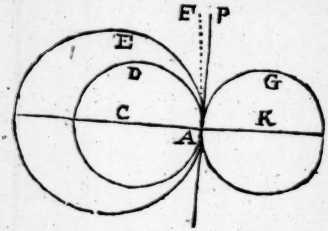
Imò verò & angulo rectilineo cuilibet poſſibili, poſſibile eſt & curvilineum æqualem aſſignare: prout ipſe Clavius, ex Proclo, demonſtrat, ad 5 d 5. Eſt enim, exempli gratia, angulus curvilineus D A E, æqualis rectilineo B A C: Et pari modo, cuivis rectilineo aſſignabili, aſſignabilis eſt æqualis curvilineus: ideóq; & curvilinei, non modò inter ſe, ſed & cum rectilineis, quamlibet aſſignabilem rationem ſubire poſſunt, quam ipſi ſubire poſsunt rectilinei inter ſe: Non igitur curvitas crurum ἑτερογένειαν angulorum inducet, quin poſſint adhuc ad rectilineos rationem ſive proportionem habere.



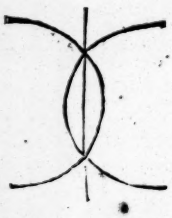
At fortaſſis dicetur, Quamvis verum illud ſit de rectilineis & curvilineis quibuſdam inter ſe, non tamen ita erit in angulis miſtis,

Imo

Imò verò in angulis miſtis illud etiam verum eſt, non modò ſi ad curvilineos, verùm etiam ſi ad rectilineos comparentur. Nam, duobus ſe mutuò contingentibus circulis, ſaltem æqualibus, G A, D A, quorum etiam utrumq; contingit, in eodem puncto A, recta P A; ne quidem ipſe Clavius negabit angulum contactûs miſtilineum GAP, (ſi modo ſit angulus) ſemiſſem eſſe anguli contactus curvilinei GAD, ſemiſſis autem ad ſuum integrum veram eſſe rationem, nemo dubitabit. Angulus igitur curvilineus & miſtilineus (ſi ſaltem anguli contactus ſint verè anguli, ut vult Clavius,) ſunt homogenei, & veræ rationis ad invicem capaces.

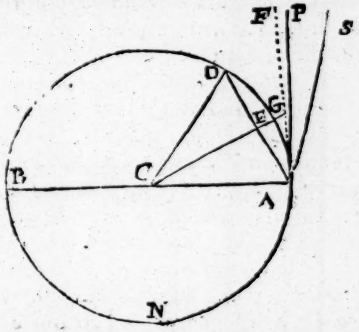


Quod ſi angulus, qui dicitur, contactûs revera non ſit angulus, (prout ego, cum Peletario, exiſtimo;) attamen curvilinei cum miſtis nihilominus homogenei erunt. Nam ſi duo circuli, ſaltem æquales, ſe mutuò ſecent, &, per duo ſectionum puncta, recta ducatur; manifeſtum eſt, fieri curvilineos angulos miſtilineorum duplos, tam qui curvis convexis, quum qui curvis concavis, continentur. Poteſt igitur curvilineus, ad angulum miſtum veram rationem habere; adeoq; ipſi, fatente Clavio, eſt homogeneus.



Sed & poteſt angulus miſtus etiam ad rectilineum rationem habere; quod nec Clavium fuiſſe negaturum exiſtimo. Nam recta (ſi non quæ tangit, ſaltem) quæ ſecat peripheriam, angulum cum peripheriâ (tam intra quam extra) miſtum facit, qui erit angulo rectilineo, ſaltem aliquo, major; qui quidem multiplicatus poterit & quemvis aſſignatum angulum rectilineum ſuperare, (& contra, rectilineus hunc) ideóq;, fatente ipſo Clavio, λόγον ἔχειν, dicendus erit, per 5 d 5. Exempli gratiâ. Si peripheriam E A, recta S A ſecet, P A tangat, in puncto A; erit angulus miſtus E A S vel æqualis vel ſaltem major angulo rectilineo P A S; & propterea poterit

poterit multiplicatus quemvis angulum rectilineum ſuperare, non minus quam ipſe PAS, (& rectilineus illum,) ideóq; ad quemvis angulum rectilineum rationem habebit, per 5 d 5. Erit igitur angulus miſtus EAS, rectilineo homogeneus: cur igitur & miſtus EAP (ſi quidem ſit angulus) non eſſet homogeneus, non video: crura ſiquidem vel eadem habent, vel quàm



ſimillima, nec aliter differunt quam quod magis aut minus divaricentur. Sed & eodem modo facile oſtendi poteſt, omnes alios angulos, ſive rectilineos ſive curvilineos ſive miſtos, (ſi angulum contactus excipias) & quidem ſive peripheriis ſive aliis curvis formentur, tales eſſe quales ne quidem Clavius negaret cuivis angulo rectilineo & homogeneos eſſe & quidem λόγον ἔχειν; ſoli ſiquidem anguli contactuum, ſecundum illum, ſunt quidem anguli plani, nec tamen aliis quibuſvis ſive rectilineis ſive curvilineis ſive miſtis homogenei: Unde autem illa, quam ſomniet, ὑπεροχὴ oriatur, neq; poteſt ille ullatenus oſtendere, neq; ego vel ſomniare. Non nego quidem illum hac in re aliquid conari, ſed conatu planè irrito: videamus tamen quid illud eſt.

CAP. VI.

Exceptionibus Clavii reſpondetur.

EGO, inquit Clavius, *angulos illos*, (contingentiæ ſcilicet & rectilineum) *Ejuſdem eſſe generis negavi, hac ſolum de causâ, quod*

angulus contactus quantumvis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat.

At inquam ego, Idem omnino sequi, si angulus contactus statuatur (non quidem angulus heterogeneus, sed) non-angulus. Nam, quod nihil anguli habet, quantumvis multiplicetur, nunquam constituet angulum: eâdem nempe ratione quâ *Ciphra*, quantumvis multiplicata, nunquam constituet *Numerum*. Assumit aut Clavius, illud nempe quod erat probandum, Angulum contactûs esse verè angulum; atq; hoc quasi concesso, conatur ostendere, Heterogeneum esse, saltem quod ad rationem attinet; eo nempe quod angulus homogeneus non sit per 5 d 5. Ego quidem definitionem Euclidis (cui ipsius argumentum innititur) facile concedo, & pro verissimâ assertione agnosco; nempe *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare*; & contra, *Magnitudines, quæ non possunt, quantumvis multiplicatæ, se mutuo superare, non dicendæ sunt rationem inter se habere*; sed pro heterogeneis habendæ sunt. Non igitur affirmo angulum contactûs & rectilineum esse quantitates homogeneas, sed nec heterogeneas, sed eorum alterum quantitatem esse, alterum non esse. Atq; illud antea dixerat Peletarius, nec tamen quidquam solidæ rationis affert Clavius, quâ contrarium ostendat.

Quod enim dicit, ex definitione anguli plani, *Ut angulus planus efficiatur, sufficere duas lineas in plano ad invicem inclinari*, non autem requiri, *ut se mutuo secent*. Ego illud fateor; sed nego peripheriam & rectam tangentem *ad invicem inclinari*, saltem quoad punctum concursus; coincidunt enim, non inclinantur. Agnosco etiam (quod alibi ait) *Angulum consistere in unico puncto, & linearum inclinatione quæ non indirectum jacent*; verum lineas has *inclinari* non agnosco. Sed & cum Peletario affirmo, eas solùm lineas *inclinari* (in puncto concursûs) quæ, si producantur, se mutuò secabunt: neq; contrarium Clavius ostendit usquam.

At, inquit, *Recta finita & infinita ideo non censentur ejusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat, quamvis sub eodem genere magnitudinis, nempe lineâ rectâ, comprehendantur.*

Respondeo. Propositio Archimedis procedit de duabus magnitudinibus inæqualibus *datis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων,) Et similiter Euclidis 1 e 10 de duabus magnitudinibus inæqualibus *propositis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων.) At verò quis

dedit

dedit unquam, vel *propoſuit*, lineam *infinitam*? Quod enim (magnitudine) *datur*, eò ipſo quòd datur, eſt finitum.

Fateor quidem dici ſolere, *Finiti ad infinitum nullam eſſe proportionem.* Sed, inquam, per *infinitum*, tunc intelligi, vel *indeterminatum* aut *indefinitum*; vel quid *Poſitivè infinitum*, quod nullos admittit terminos.

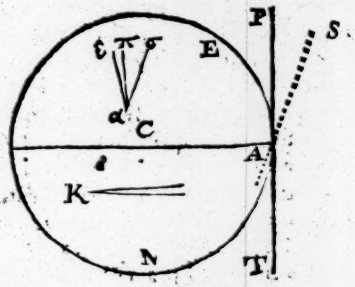
Priori ſenſu Euclides in 12 e 1, & paſſim alibi, vocem illam ſumit, dum jubet rectam infinitam ducere, vel datam rectam in infinitum producere. Non enim illud vult ut lineam quis duceret, quæ, cùm ducta fuerit, ſit infinita; eſſet enim hoc impoſſibile, & poſtulato ſecundo contrarium, cujus tamen vi ejuſdem conſtructio juberi ſolet: ſed ut linea quantumlibet longa ducatur. Et hoc ſenſu, verum quidem eſt, Quantitatis indeterminatæ ad determinatam nullam eſſe determinatam proportionem, ſed vagam ſaltem, qualis eſt ipſa quantitas. At linea recta dum *indeterminata* eſt, *data* non eſt; hoc eſt, magnitudine data non eſt, licet poſitione dari poſſit; Linea igitur indeterminata, *magnitudo data*, non eſt; Et ad præſens negotium non ſpectat: linea verò data, eſt determinatæ magnitudinis, &, ad aliam quamvis datam, determinatam habet rationem.

Poſteriori ſenſu, prout *Infinitum* ſignificat id quod *poſitivè infinitum* ſit, adeóq; omnes terminos poſſibiles actu excedat; ego planè nego, ejuſmodi *rectam infinitam* omnino dari poſſe: adeóq; nihil mirum videbitur, quantitatis impoſſibilis impoſſibilem eſſe rationem, ſeu proportionem; quod autem impoſſibile eſt, illud non eſt; adeóq; cum infiniti ad finitum ratio ſit impoſſibilis, ejuſmodi ratio nulla eſt, ſive non eſt. At interim, magnitudinum inæqualium *datarum*, ratio etiam datur, (per 1. Dat. Euclid.) & propterea, ſi angulus contactûs & rectilineus ſint quantitates inæquales verè datæ, dabitur etiam eorum ratio; & quidem, ſi anguli ſint, erunt homogenei.

Deniq; (ut nihil præteream, a Clavio allatam, quod alicujus momenti, hac in re, videri poſſit) hujuſmodi forſan ratiocinium ex ipſius dictis (pag. 262.) colligi poterit. Si duorum angulorum mutuò applicatorum duo crura homologa invicem congruant, reliqua verò duo crura non congruant, illi anguli non ſunt æquales: At anguli contactûs crus alterum, nempe recta contingens, anguli rectilinei cruri ſuperimpoſitum, congruere poteſt, at interim crus reliquum reliquo cruri non con-

gruet (quia curvum recto non congruet;) Ergo nulli angulo rectilineo æqualis eſt angulus contactûs; adeóq; nec ullam habebit ad angulos rectilineos rationem.

Reſpondeo 1°. Eodem argumento ſequeretur etiam angulum E A S (peripheriâ & rectâ ſecante comprehenſum) non minus quam E A P (angulum contactus) non modo nulli an-



gulo rectilineo poſſibili æqualem eſſe (quia nempe ſi crus alterum A S, anguli rectilinei cruri alterutri ſuperponatur & congruat, reliquum tamen A E reliquo congruere non poteſt) quod fortè concederet Clavius: verùm propterea nullam eſſe rationem hujus ad illum, nempe anguli E A S ad quemvis poſſibilem rectilineum; quod tamen ne quidem Clavius diceret; non enim negare poſſet angulum E A S, ſaltem multiplicatum, poſſe angulum rectilineum, ſaltem aliquem, ſuperare; præſertim cum citra dubium ſit, ipſum E A S angulum miſtum, rectilineo P A S vel majorem eſſe vel ſaltem æqualem. Argumentum igitur allatum, ne quidem Clavio judice, quicquam præſtabit.

Ut autem non ſolum retorqueam argumentum, ſed & nodum ſolvam; Reſpondeo 2°. Verum quidem eſſe, quòd, ſi duorum angulorum æqualium duo crura homologa congruant, congruent etiam & reliqua duo crura, tamdiu ſcilicet quam eorum utrumq; eandem retinet inclinationem, quæ fuit in ipſo puncto concurſus (vel etiam ubi utrumq; ſimul æquè ab illâ inclinatione deflectat:) at vero ſi alterum ſuam quam in puncto concurſûs habuit inclinationem retineat, reliqua verò ſuam mutet, illa non diutiùs congruent. At vero hoc in angulis miſ-

ſtis (ſive angulis contactûs ſive aliis) ad rectilineas comparatis perpetuo accidit; propterea quod curva inclinationem ſuam in ſingulis punctis mutet, recta vero eandem ſemper inclinationem retineat; adeóq; quamvis earum in ipſo contactûs puncto eadem fuerit inclinatio, poſtquam tamen ab eo receſſum eſt fiunt earum inclinationes ad invicem alia atq; alia. Non igitur ſequitur, angulum miſtum angulo rectilineo æqualem eſſe non poſſe, quamvis non utraq; eorum crura, extra punctum contactûs, congruant. Atq; ita ea quæ Clavius adduxit, ut probet angulum contactûs & rectilineum heterogeneos eſſe, & non ejuſdem generis ut inter eos aliquam rationem eſſe dicatur, ſatis refelli judico; adeóq; nihil ſupereſſe quò minus argumentum ex 1 & 10 deſumptum legitimè concludat.

CAP. VII.

Angulorum Planorum ὁμογένεια confirmatur.

VErùm nequis exiſtimet, id ſatis non eſſe, ea quæ in contrarium allata ſunt refelliſſe; niſi & affirmative concludam, Angulum contactûs, ſi quidem angulus ſit, reliquis angulis planis, & nominatim rectilineis, homogeneum eſſe: Sic argumentor.

1° Quæ mutuò poſſunt vel addi vel auferri; ea non ſunt heterogenea: (Quis enim unquam Lineam Solido, aut Superficiem Numero, vel addi poſſe, vel auferri dixit? Poſſunt quidem *ἀσύμμετρα*, ſive incommenſurabilia, invicem & addi & auferri, ut in Binomiis & Apotomis notum eſt, & paſſim in X Euclidis: Heterogenea vero non poſſunt, ſed plane ſunt *ἀσύμβλητα*.) At angulus contactûs, ſi quidem ſit angulus, & recto auferri poteſt, ut maneat angulus ſemicirculi internus; & recto adjungi poteſt, ut fiat angulus ſemicirculi externus: (atq; idem oſtendi poteſt ſi ad alios quoſvis angulos planos comparetur:) Non eſt igitur Heterogeneus.

Hujus autem argumenti vires, vel quod Peletarius monuerit, vel quòd ipſe præſenſerit, conatur Clavius quantum poteſt, fruſtra tamen, declinare. Ideóq; negat ſe Angulum contactûs aſſerere rectilineo ſimpliciter Heterogeneum eſſe, ſed *quodammodo diverſi generis*, (eo nempe quòd angulum rectilineum quantum-

vis multiplicatus ſuperare nequeat:) &, licet quoad alia homogeneus ſit, *non cenſeri tamen ejuſdem generis quod ad proportionem attinet* At vero quo pacto ea, quæ quoad alia ſunt homogenea, ſint quoad rationem heterogenea, ego plane non video. Euclides certe 3 d 5, ubi Rationem definit, Homogenea, non dubitat eſſe, quoad rationem homogenea: Eſt enim, inquit, λόγος ratio, δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πως πρὸς ἄλληλα τοιὰ σχέσις, *duarum magnitudinum, ejuſdem generis, mutua quædam quoad quantitatem habitudo.* Siquæ igitur duæ quantitates homogeneæ ſint (prout Clavius non negat hos eſſe angulos) earum mutua ad invicem quoad quantitatem habitudo *Ratio* dicitur.

Quod autem attinet ad ejuſmodi quantitates homogeneas, ſive ejuſdem generis, quarum altera quantumvis multiplicata reliquam nunquam ſuperabit: Euclides nullas agnoſcit tales eſſe; ſed ἐμπῶς aſſerit, 5 d 5, Quantitates omnes, quarum una ad alteram *Rationem habere* dicendæ ſunt, (hoc eſt, per 3 d 5, omnes quantitates *homogeneas,*) ita eſſe conſtitutas, ut *multiplicatæ ſe mutuo ſuperare poſſint,* Et propterea, in 1 e 10, illud poſtulatum aſſumit, quaſi per ſe notum, quódq; demonſtratione non indigeat, *Quantitatem quamlibet minorem toties multiplicari poſſe ut tandem majorem quamlibet aſſignatam ſuperet.* Nam in ipſa conſtructione ſeu κατασκευῇ ad illam demonſtrationem, ſtatim jubet *Magnitudinem minorem aſſignatam toties multiplicare, donec majorem aſſignatam ſuperet;* quaſi quidem illud fieri poſſe nemo dubitaverit. Et ſimiliter Archimedes paſſim. At neq; Euclides neq; Archimedes, illud fieri poſſe, in aliis ſive angulis ſive quantitatibus, magis quam in ipſo angulo contactûs, uſquam oſtendit. Vel igitur univerſaliter verum eſt, & poſtulandum, Quamlibet quantitatem minorem toties poſſe multiplicari ut quamlibet majorem aſſignatam ſuperet; vel ſaltem Euclides aut Archimedes illud ſpecialiter de quibuſdam quantitatibus demonſtraſſent, quibus illud convenit, & non tanquam univerſaliter verum & per ſe cognitum poſtulaſſent. Poterat etiam Clavius meminiſſe, ſe Euclidem reprehendiſſe, quod axiomate 11 (vel, ſecundum aliòs, poſtulato 5) aſſumpſerit, *duas rectas ad invicem in eodem plano inclinatas, ſi producantur, tandem concurrere*; quoniam hoc, quamvis verum ſit, non tamen gratis aſſumendum erat ſed demonſtrandum, ideo nempe quia in lineis curvis hoc non conſtat (de quibus nec Euclides illud aſſerit.) Idcóq; Clavius

ad

ad 28 e 1 illud demonſtrat; iis tamen ibidem aſſumptis quæ & nihilo minus dubia ſunt, & quæ eodem ipſo nomine ſunt reprehendenda. Quam juſta autem iſta ſit Euclidis reprehenſio, non hic vacat inquirere: at ſaltem eadem ratione, ne dicam longe majori, reprehendendus eſſet tam ille quam Archimedes, ſi modo hoc poſtulatum, quod indiſcriminatim aſſumitur, non eſſet univerſaliter verum; atq; Clavius, Euclidis reprehenſor, illud (ſi poſſet) demonſtraſſet de aliis omnibus quantitatibus verum eſſe, quamvis de angulis contactuum verum non ſit. Quodſi neq; Clavius, neq; quiſpiam alius poterit demonſtrare, aliis quantitatibus magis illud convenire quam hujuſmodi angulis (ſi ſaltem ſint anguli & vere quanti;) concedendum erit illud univerſaliter verum eſſe, prout Euclides & Archimedes videntur ſenſiſſe.

2° Sic ulterius arguo, Duæ quantitates, quarum altera major altera minor eſt, ſunt inter ſe *Homogeneæ*, & quidem (ſi illud interponere neceſſe ſit) *quoad Rationem* homogeneæ: Sed angulus contactûs, ſi quidē ſit angulus, & angulus quivis rectilineus, ejuſmodi ſunt quantitates. Ergo Propoſitionē minorem demonſtrat Euclides 16 e 3. Major propoſitio pariter videtur indubitata: Nam quæ rationem habent ad invicem ſunt homogenea, per 3 d 5. At quæ ſe habent ad invicem ut majus & minus, ea ſaltem ad invicem Rationem habent. Quî enim fieri poteſt ut quantitas quantitate minor ſit, in nulla tamen Ratione minor? Imò verò, Quantitatem quantitate minorem eſſe, nec tamen ad illam Rationem habere, eſt contradictio in adjecto; nam ipſum *minus eſſe* eſt *rationem habere*. Atq; hoc quidem ne ipſe Clavius negare debet; nam & ille Proportionem ſive Rationem (quæ apud illum tantundem ſignificant, ideóq; & hic paſſim promiſcue uſurpantur) dividit in proportionem Æqualitatis & proportionem Inæqualitatis, & hanc iterum ſubdividit in proportionem Majoris Inæqualitatis, & Minoris Inæqualitatis, ſive Majoritatis & Minoritatis: Adeò ut quicquid ſit alteri vel Æquale vel Inæquale, quicquid altero Majus eſt vel Minus, illud ſaltem Rationem habet. Si igitur angulus contactûs ſit revera Angulus, ſitq; angulo rectilineo Minor, habebit ad illum rationem Minoritatis, ſive Minoris Inæqualitatis; Quæ autem rationem habent, ea poſſunt multiplicata ſe mutuo ſuperare: At angulus contactûs, quantumvis multiplicatus, rectilineum

non

non ſuperabit; ideóq; nec rationem ad illum habet; quare nec eſt quantitas minor, nec quidem omnino quantitas.

Huic argumento nihil omnino eſt quod Clavium oppoſuiſſe reperio; Fluſſatem tamen legerat ubi hoc innuitur (laudat enim) adeóq; hanc difficultatem non tam ignoravit quam diſſimulavit; niſi potius dici poterit, non illi incubuiſſe illas difficultates ſolviſſe, quas, quamvis ipſe noverit, Peletarius tamen non objecerit.

At Fluſſas Candalla, ad 16 e 3, Fatetur quidem rationem inæqualitatis concedendam eſſe inter angulum contactûs & rectilineum: verùm laxiorem eſſe hanc proportionem, ait, quæ intercedere poteſt inter illa quæ ſunt diverſi generis; at verò particularem certámq; rationem inter ea tantum intercedere quæ poſſunt multiplicata ſe mutuo ſuperare.

At ego, quorſum ſe torqueant Mathematici, ut ſubterfugia tam tenuia tanto negotio exquirant, certe non video; cum poſſent hæc omnia quæ urgentur incommoda facillimo negotio devitare, modo fateri vellent, prout res eſt, Angulum contactûs eſſe revera non-angulum.

Clavius autem, quamvis Fluſſatem legerat, adeóq; ipſius reſponſum huic difficultati viderat, mallet tamen (ut videtur) totam hanc difficultatem diſſimulare, quam tam leve reſponſum obtendere, dum tamen quicquam fortaſſe ſolidius quod opponat non habuit.

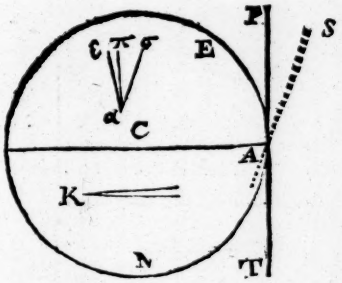
Fluſſati vero ſic reſpondeo. Nobis quidem ſufficere modo concedatur ratio inæqualitatis: Non enim poſtulat vel Euclidis vel Archimedis propoſitio, cui innititur argumentum, ut propoſitæ magnitudines ſint *in certâ aliquâ ratione* inæquales, (puta in ratione multiplici, ſuperparticulari, &c.) ſed ſolummodo, ut habeant *rationem inæqualitatis*: *Datis* (inquiunt) *duabus magnitudinibus inæqualibus*. &c.

Hæc autem cùm ſcripſeram, Fluſſatem paulo accuratius intuitus, comparatis item quæ ipſe alibi habet ad 3 d 5 & 1 e 10; video illum, per *rationem incertam, confuſam, indeterminatam*, nihil aliud velle, quàm ἄῤῥητον, ἄλογον, *ſurdam* vel *irrationalem*: adeóq; concedit ille id quod jam contendimus, nempe *angulum contactûs ad angulum rectilineum rationem habere proprie dictam* (modo ſcilicet quantitatem eſſe conſtet) illam ſcilicet quam vult Euclides 3 d 5 & 5 d 5. (adeoq; illum hac in re adverſarium non habeo,)

beo;) *irrationalem* tamen eſſe hanc rationem exiſtimat, nec veris numeris explicabilem. Sed & affirmat, angulum contactûs verum anguli quantitatem habere, eamq; quantitatem talem eſſe quæ multiplicata quantitatem anguli rectilinei ſuperare poterit; non quidem manente angulo contactûs, ſed mutato angulo contactûs in rectilineum; eodem ſcilicet modo quo angulus rectilineus acutus ita multiplicari poteſt, ut (mutatâ tamen ſpecie anguli) rectum ſuperare poſſit: Et, quo ſenſu acutus rectilineus eſt minor omni recto vel obtuſo poſſibili, eodem (nec alio) & angulum contactûs eſſe minorem omni acuto poſſibili, poſſe tamen (mutatâ anguli ſpecie) multiplicatum acuto rectilineo majorem fieri, ſicut & acutus rectilineus (mutatâ ſpecie anguli) multiplicatus evadit recto major, aut etiam obtuſo. At hæc quomodo cum iis, quæ ab Euclide demonſtrantur ad 16 e 3, conſtare poterunt, ipſe viderit.

Verùm ſi tanti illud eſſe putet vel Fluſſas, vel quiſpiam alius, ut non modo oſtendantur hæ magnitudines (ſi ſaltem utraq; ſit verè magnitudo) *inæquales*, ſed & *in certa aliqua ratione inæquales*, ſaltem vel rationali vel irrationali; Ego hoc facile probaturus ſum ſequenti argumento.

3o Igitur, dimittamus aliquantiſper angulum contactûs EAP, & tractemus angulum ſemicirculi: Eſt, inquã, angulus ſemicirculi EAC non modò alicui angulo rectilineo *inæqualis*, ſed & *in cer-*



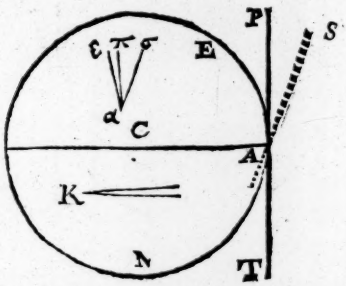
ta aliqua ratione inæqualis; talem ſaltem rationem habet, qualem vult Euclides in 5 d 5: Poteſt enim, ſaltem multiplicatus

angulum rectum rectilineum ſuperare. Quod neq; Clavius neq; quiſquam alius negabit. Adeóq; angulus ſemicirculi, fatente Clavio, ad angulum rectum rectilineum, rationem certam & determinatam habet, quamvis illa fortaſſe cognita non eſſet.

At, per 5 Datorum Euclidis, *Si magnitudo ad ſui aliquam partem habeat rationem datam, etiam ad reliquam habebit rationem datam*: adeoq; ſi angulus rectus rectilineus P A C, ad ſui partem, nempe angulum ſemicirculi E A C (ſi ſaltem angulus ſemicirculi ſit ipſius pars, & non potius ipſe totus) rationem datam habeat, habebit & rationem datam ad partem reliquam E A P angulum contactûs: Et quidem, pari de cauſâ, ſi ad illum rationem *dabilem* habeat, quippe certam & determinatam, habebit & ad hunc rationem *dabilem*, certam puta & determinatam. quod oſtendendum erat.

Deniq;, quoniam ideo præſertim Clavius angulum contactûs rectilineis homogeneum eſſe non putat, neq; ad illos rationem ullam habere, quòd nulli rectilineo poſſibili æqualis eſſe poſſit; (quanquam illud leve ſit argumentum; nam, verbi gratia, $\sqrt{2}$ nulli numero æqualis eſt, aut eſſe poteſt, cum ſit latus ſurdum, non tamen eſt planè heterogeneum quid, neq; nullam omnino rationem habet quamvis non, ut loquuntur, rationalem:) conabor utcunq; & illud probare; nempe Angulum contactûs, ſi verè ſit angulus, eſſe rectilineo alicui poſſibili æqualem, ſequenti argumento.

4° Oſtenſum eſt ſupra, angulum curvilineum E A S, recti-



lineo

lineo cuivis homogeneum eſſe, atq; ad illum rationem proprie dictam habere, per 5 d 5, quia poteſt, ſaltem multiplicatus, rectilineum ſuperare. Si verò ſit rectilineis homogeneus, adeóq; v. g. ad rectum rectilineum veram rationem habeat, erit ſaltem alicui rectilineo æqualis: erit enim vel hic aliquanta pars recti, vel rectus hujus, vel deniq; erunt æquales: angulos autem rectilineos ad invicem in quâcunq; ratione conſtitutos in rerum naturâ poſſibiles eſſe, vix quiſquam Mathematicus negabit; cum illud omni quantitati continuæ, propter ipſius diviſibilitatem in infinitum, competere receptum ſit; atq; hoc, ſi non Clavius, ſaltem Fluſſas expreſſe agnoſcit, in iis quæ decimo Euclidis præmittit. Eſto igitur angulo miſto E A S, æqualis rectilineus *ταυ*: eſt autem hic vel æqualis ipſi P A S, vel ſaltem ipſo major, (minor enim eſſe non poteſt, quoniam P A, cum tangens ſit, extra peripheriam cadat, per 16 e 3.) ſi æqualis ſit, conceditur quod erat probandum, nempe angulum *ταυ*, hoc eſt E A S, æqualem eſſe ipſi P A S, ideóq; angulum E A P nihil eſſe: Si vero *ταυ* ſit ipſo P A S major, auferatur inde *παυ* ipſi P A S æqualis, per 23 e 1, & manebit *ταπ* ipſi E A P æqualis, per 3 a 1. hoc eſt, angulus rectilineus angulo contactûs æqualis. At dicetur, Euclidem demonſtrâſſe hoc eſſe impoſſibile, ut angulus contactûs ſit rectilineo æqualis. Recte quidem; atq; illud ego agnoſco. Sed inde ſic diſputo; ſi angulus contactûs ſit verè angulus, erit alicui rectilineo æqualis, per ea quæ jam demonſtravimus: At nulli rectilineo eſt æqualis, per ea quæ demonſtrat Euclides 16 e 3: Ergo non eſt vere angulus. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Atq; hactenus principale Peletarii argumentum, ex 1 e 10 deſumptum, ab iis quæ in contrarium afferuntur vindicavi; adeo ut ipſius ſequela inconcuſſa maneat; atq; ſimul angulos planos tam curvilineos quam miſtos rectilineis homogeneos oſtendi.

CAP. VIII.

Honoratiſſimi Equitis D. HENRICI SAVILII Teſtimonium hac in re.

Libet tandem hic ſubjungere, quæ inter Honoratiſſimi Equitis, D. *Henrici Savilii* (Patroni ſeu Fundatoris noſtri Munificen-

nificentiſſimi) ſchediaſmata alicubi, de quantitatibus Homogeneis, reperio. inter ſcripta quædam illius imperfecta nondum digeſta, de menſuratione Circuli, (quæ, ut videtur, adverſus Joſephi Scaligeri Cyclometrica inchoaverat,) de Ammonio, qui circuli quadraturam, propter ἀνομοιογένειαν linearum rectæ & curvæ, impoſſibilem eſſe putavit, Patronus ille noſter (qui duos Mathematum Profeſſores publicos ſuis ſumptibus inſtituit) idemq; acutiſſimus Mathematicus, hæc habet; "Stultiſſimus Ammonius, ut eſt apud Simplicium, putavit ideo circulum quadrari non poſſe, quod non homogeneæ eſſent recta linea & circularis. Quo quid dici potuiſſet ineptius! Quid? non ea proprie homogenea ſunt, quæ & proprie majora ſunt alia aliis & proprie minora? Verbi gratia; Linea & Superficies heterogenea ſunt, ſic Superficies & Corpus, & plane ἀσύμβλητα, neq; enim linea proprie vel major vel minor dici poteſt ſuperficie, nec ſuperficies corpore, neq; enim inter ſe proportionem habent aut habere poſſunt. Nam, ut ait Magiſter noſter, rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur quæ poſſunt multiplicatæ ſe invicem excedere. Sed quadratum circulo inſcriptum minus eſt, propriè & non κατὰ χρῆσιν λεγόμενον, neq; enim linea omni lineæ eſt ὁμογενὴς. Nemo etiam unquam doctus dubitavit, in rerum natura eſſe quadratum circulo dato æquale, etſi in eo inveſtigando διὰ ὁπτικῶν διαγείσης, i.e. per circulum & rectam lineam, ſudarunt omnes penè tam antiqui quam recentiores, non magno tamen ſucceſſu, etſi alii aliis fuerint feliciores.

Ex his liquet, juxta Honoratiſſimi *Savilii* ſententiam, omnino abſurdum eſſe, ea pro Heterogeneis haberi, quæ proprie majora ſunt alia aliis, & proprie minora. Non tamen diſſimulabo, illum de angulo contactûs & ſemicirculi aliquantulum hæſitâſſe; (& quid tandem concluſurus fuiſſet, ſi, re mature penſitatâ, inceptam illam diſquiſitionem perfeciſſet, non auſim aſſerere;) nam & hæc ad marginem adſcripſerat, "Quamvis de "angulis κερατοειδέσι & ἡμικυκλίοις poſſet eſſe quæſtio, qui mihi "videntur proprie λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα per 3.d 5. nam "proprie alter minor eſt omni acuto rectilineo, & alter major: neq;

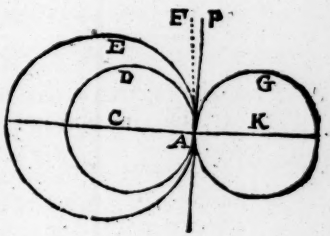
" neq; tamen potest κεφαπεσθης, utcunq; multiplicatus, vel mi-
" nimum excedere rectilineum, quia minimus rectilineus potest
" infinite dividi, Sed & statim subjungit. *def.* 3ª *&* 5ª Vi *libri irreconciliabiles.* Et quidem ego idem prorsus sentio; nempe, si statuatur angulum contactûs veram anguli quantitatem habere, definitiones illas duas simul esse veras non posse: At, si concedatur, angulum illum veram anguli quantitatem non habere, sed esse angulum tantummodò imaginarium; neq; inter se pugnabunt definitiones illæ, neq; cum 16 e 3 aut 1 e 10, aut cum aliâ quavis quam vel apud Euclidem vel Archimedem (ne plures nominem) uspiam exstare scio.

CAP. IX.

Argumentum tertium; ab æqualibus similium segmentorum angulis desumptum.

SEquitur aliud Peletarii argumentum examinandum. Illud verò huic Lemmati innititur, nempe, *Angulos similium segmentorum, saltem semicirculorum, esse æquales.* Cujus Lemmatis veritatem mox examinabimus. Interim, eo quasi concesso, hæc inde deducit Peletarius Theoremata.

1. *Contactus circulorum interior, quantitas non est.* Nam si semicirculorum anguli CAD, CAE, sint æquales, contactus interior DAE quantitas non erit, quoniam sive addatur sive auferatur quantitatem datam non immutat.



2. *Contactus lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.* Nam si angulus DAP sit quantitas, partes habebit, ideóq; divisibilis erit: nempe vel per rectam ut FA, quod fieri non posse ostendit Euclides 16 e 3; vel saltem per curvam, puta EA circumferentiam majoris circuli, uti ponit Clavius; sed neq; per hanc, quia DAE non est quantitas, ut jam ostensum est: Sed neq; per aliam curvam, quæ non sit peripherai;

ria EA, angulum D A P non dividat, nihil eſt quod ſuadeat hoc magis fieri poſſe per aliam quamvis curvam.

3. *Contactus circulorum exterior, quantitas non eſt.* Cum enim nec E A P, nec G A P, ſit quantitas, (per præced.) neq; erit E A G quantitas, eorum ſcilicet aggregatum.

4. *Anguli qui fiunt a diametro & peripheriâ, ſive intra ſive extra circulum, recti ſunt, & rectis rectilineis æquales.* Nam, cum D A P non ſit quantitas, erunt anguli D A C, D A K, æquales rectis rectilineis P A C, P A K.

Hæc Theoremata, ex illo Lemmate conceſſo, ſat evidenti conſecutione inferri, non negat Clavius, neq; alii credo negabunt. Tota lis eſt de veritate iſtius Lemmatis; An ſcilicet *Anguli ſimilium ſegmentorum, ſaltem ſemicirculorum, ſint æquales.* Hoc Clavius negat. Videamus igitur quid in illius defenſionem adduci poſſit.

Quid autem ipſe Peletarius adduxit in ejus adverſus Clavium Apologia, neſcio quidem, quoniam illam Apologiam nondum mihi contigit videre. At in ipſius commentario quodam *De contactu linearum,* (ubi eadem fere habentur quæ & in commentariis ejus in Euclidem ad 16 e 3, cum aliqua tamen acceſſione,) nonnulla profert, quibus iſtius Lemmatis veritatem adſtruere conatur; quæ mox examinabimus.

Præmittit autem, *Hoc pronunciatum, pro principio Geometrico merito haberi poſſe.* Et quidem mihi non iniquum videtur poſtulatum, ut concedatur; (quanquam non ignorem illud ob præſentem controverſiam, vix alia quidem cauſâ, in dubium vocari.) Non enim ego omnino video, quo pacto figuræ *ſimiles* dici poſſunt, niſi & homologa latera habeant proportionalia, & ſimiliter ad invicem ſita: At, quonam pacto, quæ angulos inæquales faciunt, adeóq; inæquales habent ad invicem inclinationes, interim ſimiliter ſita dicantur, ego prorſus non intelligo.

In figuris rectilineis, nemo dubitat, variationem angulorum mutare ſpeciem figuræ, (non enim aliter differt Rhombus a quadrato;) &, figurarum ſpecie datarum angulos etiam dari, (per def. 3. Datorum Euclidis:) & quare illud in curvilineis & miſtis figuris non obtineret, nulla ratio aſſignari poteſt. Adeóq; ſemicirculi, niſi æquales habeant angulos, figuræ ſimiles dici non deberent.

Atta

Attamen, e contra, ſi figuræ duæ ita ſint conſtitutæ, ut in illis rectæ omnes ſimiliter poſitæ, ſint (reſpective ſumptæ) proportionales, quomodocunq; ducantur; eorum latera & angulos omnes ſimiliter poſita eſſe, quis dubitaret? Niſi enim ſimilis eſſet linearum inter ſe ſitus atq; curvatura (ſed in hac anguli acutiores, & major flexuum curvatura, in illâ ſecùs) impoſſibile eſt, ut inſcriptæ in una figura, proportionales ſint ſimiliter inſcriptis in reliquâ: ut per ſe videtur ſatis manifeſtum viro Mathematico. At verò in ſemicirculis omnibus, (aut etiam ſegmentis aliis quibuſcunq; ſimilibus,) rectæ ſimiliter inſcriptæ ſunt inter ſe proportionales; & quidem, proportionalium ſubtenſarum, ſimiles arcus ſunt etiam proportionales; ut Mathematicis omnibus eſt notiſſimum: ideóq; & ſimiles in omnibus curvaturas, & angulos æquales, videtur omnino dicendum eſſe.

Non ignoro quidem Euclidem aliter figuras ſimiles rectilineas, aliter ſimilia circulorum ſegmenta definiviſſe. Nempe *Similes figuræ rectilineæ definiuntur, quæ angulos ſigillatim æquales habent, & latera quæ circa æquales angulos proportionalia.* 1 d 6. *Similia* verò *circulorum ſegmenta* definit, non quidem ex æqualitate angulorum *quos habent*, ſed *quos capiunt*: 10 d 3. Non quaſi ſimilium ſegmentorum anguli eſſent inæquales: ſed quoniam, ubi poſtea de ſimilitudine ſegmentorum agendum eſſet, facilius eſſet quantitatem anguli in ſegmento, quam anguli ſegmenti, demonſtrare.

Et quidem certiſſimum eſt; Euclidem ea κειμήλια definitionibus inſerere, non ſemper quæ rei naturam intimius ſpectent, ſed quæ ſecuturis demonſtrationibus meliùs ſubſervìant. Exempli gratia. In ult. def. primi, definitur Parallelìſmus rectarum, ex *non-concurrentia, quamvis infinitè utrinq; producantur*; quod quidem in lineis rectis ejuſd m plani, ſat infallibile eſt criterium parallelìſmi: hoc autem κειμήλιον præ aliis ſelegit, ut eò meliùs inſerviret ea definitio demonſtrationi prop. 27 e 1. ubi primò de parallelìſmo agendum eſſet. At interim nemo dubitare poterit, quin *æqualia ubi q; ab invicem diſtantia* intimius ſpectet parallelìſmi naturam, licet ipſius propoſito nimùs fortaſſe conveniret. Nam certiſſimum eſt, multa *non-concurrentia* non tamen eſſe parallela, ut liquet ex rectis non in eodem plano, item ex circulis qui ita duci poſſunt, ut neq; ſint concentrici, neq; tamen ſe

mutuo

mutuo ſecent, item ex conchoide cum ſua recta, & ex linea hyperbolica cum ſua ἀσυμπτώτῳ, aliiſq; multis. At *Parallelismus* & *Æquidiſtantia*, vel idem ſunt, vel certe ſe mutuo ſemper comitantur. Atq; idem de aliis non paucis definitionibus dicendum eſſe, nemo, qui rem ſerio perpendit, dubitare poterit.

Atq; illud proculdubio dicendum erit de ſimilitudine figurarum. Quamvis enim Euclides ex re ſua fuiſſe duxerit ſimilitudinem aliter in figuris rectilineis, aliter in circulorum ſegmentis, definire, quò meliùs ſcilicet ſecuturæ demonſtrationes procederent: Attamen non dubitandum eſt eandem utrobiq; communem ſimilitudinis notionem tam Euclidem quam alios Geometras habuiſſe, licet non eodem ſemper medio eadem facilitate poſſet utrobiq; pro re nata demonſtrari. Figuras enim ſimiles eſſe (ſive rectilineæ ſint, ſive curvilineæ, ſive miſtæ; ſive item pluræ, ſive gibbæ, ſive concavæ; ſive deniq; ſuperficiales, ſive ſolidæ) nil aliud in univerſum eſt, quàm, earum ſingulas partes homologas ſimiliter tam ad ſe invicem quam ad totam ſitas eſſe: Et quicunq; hoc demonſtraverit de quibuſvis figuris, quocunq; demum medio id fiat, demonſtrabit illas ſimiles eſſe. Non enim *ſimilitudo* de ſimilibus rectilineis, & ſimilibus curvilineis Æquivoce prædicatur, (ſecundum aliam atq; aliam ſignificationem) ſed planè univoce.

Cùm igitur angulorum æqualitas, (ſine qua nec eadem erit partium ad invicem inclinatio, aut ſimilis inter ſe poſitio,) in ipſa communi Similitudinis notione includatur; non eſſet iniquum poſtulatum ut hoc pro principio per ſe noto concedatur, (utpote quod ex mera terminorum explicatione immediate reſultat,) *ſimilium figurarum angulos eſſe æquales*

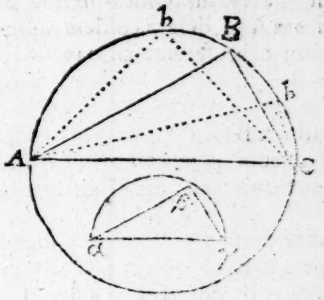
CAP. X.

Similium ſegmentorum angulos æquales eſſe, ulterius confirmatur.

QUamvis autem hæc æqualitas angulorum in figuris ſimilibus, ſatis videatur manifeſte in ipſa *Similitudinis* notione contineri, ut jam dictum eſt; adeoq; veritatem illius aſſertionis, *Semicirculorum angulos æquales eſſe*, tanquam pronunciati ſua luce noti concedendam eſſe: Attamen, quoniam, ob præſentem controverſiam, illud in dubium vocatur; attulit Peletarius nonnulla

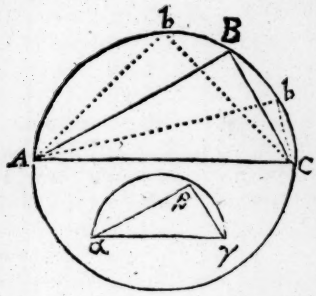
nonnulla quibus sententiam suam hac in re confirmet, Quæ si cui forsan, prout ab ipso proferuntur, minùs satisfaciant, conabor illa & explicare & confirmare, aliáq; prout res tulerit adjungere. Quanquam non ignorem eò difficiliorem mihi incubituram provinciam, quò minùs differt assertio probanda a principio per se concedendo, quasi suâ luce cognito. Quando enim de hujusmodi propositionibus, quæ vel principia sunt vel principiis proxima, oritur controversia; difficilius reperitur Medium quo probetur, quod sit ipsa re probanda minus dubium: cùm tamen nisi ex præconcessis & notioribus nulla procedat legitima argumentatio. Non tamen ob hanc difficultatem quicquam diffido rem illam satis Geometrice demonstrandam fore.

1° Argumentum desumam ex 10 d 3, quæ est similium segmentorum definitio. *Similia circuli segmenta, sunt, quæ angulos capiunt æquales; aut, in quibus anguli sunt inter se æquales.* Peletarius hinc urget, eadem analogia & *segmentorum angulos* æquales censendos esse non minùs quàm *angulos in segmentis*: Hoc est, qua ratione anguli rectilinei A B C, $\alpha\beta\gamma$, in similibus segmentis æquales sint habendi, eadem & angulos mistos ECA, $\beta\gamma\alpha$, item BAC, $\beta\alpha\gamma$, æquales etiam habendos esse. Quodego quidem verum esse nn dubito. Nam nisi peripheriæ A B C, $\alpha\beta\gamma$, eandem habeant inclinationem ad suas subtensas AC, $\alpha\gamma$, non erunt ad illas similiter positæ, adeóq; neq; figuræ similes erunt. At si eadem utrobiq; inclinatio, tum & idem utrobiq; angulus per def. anguli plani.



2° Sed, quoniam Euclides in hac 10 d 3 illud non *expressis* de angulis segmentorum, sed de angulis in segmentis, verba facit; ego inde paulò aliter argumentum instituam, assumpta etiam 21 e 3, nempe, *In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.* Unde sequitur, angulum A E C tantundem

prorſus eſſe ubicunq; in ea peripheria ſumatur punctum B, eundem nempe cum eo qui eſt in ſimili ſegmento $\alpha\beta\gamma$. His poſitis, ſupponamus rectam AB (quantum opus eſt prolongatam) puncto A manente, circumduci; adeóq; peripheriam ſecare in variis ſucceſſive punctis B, B, B, &c Et ab his punctis ſectionum rectas BC, BC, BC &c. duci, ad idem punctum C. Manifeſtum eſt, prout punctum B ad punctum C propiùs accedit, rectam AB longiorem fieri (modò ſegmentum propoſitum non excedat ſemicirculum) & BC breviorem, (angulo interim ABC non mutato,) uſq; dum rectâ AB ad ipſam AC accedente, idem fiat punctum B & C, hoc eſt, recta BC in unicum peripheriæ punctum degeneret, adeóq; recta BC (quanta quanta ſit) jacére ſupponitur in ipſa peripheria; adeóq; recta AB, ad ſitum AC delata eoſdem nunc angulos cum peripheria facit quos prius fecerat cum recta BC producta, nempe angulum ABC, ejuſq; reſiduum ad duos rectos; hoc eſt, angulum inferiorem (qui eſt oppoſiti ſegmenti angulus) eundem cum angulo ABC, atq; (eadem ratione) angulum ſuperiorem eundem cum ipſius complemento ad duos rectos. Sed & idem prorſus eveniret in ſimili ſegmento $\alpha\beta\gamma$, adeóq; & illic $\alpha\beta$, ad ſitum $\alpha\gamma$ delata, eoſdem angulos facit ad peripheriam quos prius fecerat ad $\gamma\beta$ (ultra punctum β productam) hoc eſt, eos quos AB ad rectam BC (productam) fecit. Adeóq; ſimilium ſegmentorum ABC, $\alpha\beta\gamma$, licet inæqualium, (quod etiam oppoſitis eorum ſegmentis accidit,) anguli ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.



Atq; etiam eadem opera demonſtratum eſt, ſi ſegmenta illa ſimilia ſint ſemicirculi, eorum angulos æquales eſſe rectis rectilineis; erit enim in ſemicirculo, tam angulus ABC, quam ipſius reſiduum ad duos rectos, angulus rectus.

Item, in univerſum, Angulus in ſegmento, æqualis eſt angu-

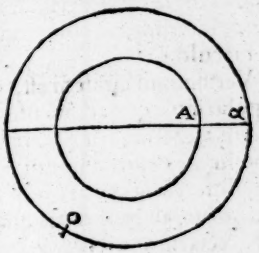
lo

lo segmenti oppositi. Seu, quod idem est, Angulus in peripheria segmento insistens, est æqualis angulo istius segmenti cui insistit.

3° Idem sic evincitur. Angulus BAC tantus est quantus semissis peripheriæ BC, per 20 e 3, (hoc est, angulus BAC est ad quatuor rectos, ut semissis peripheriæ BC, ad integri circuli peripheriam.) Ideoq; si ecusq; divaricentur AB, AC, donec ipsum B (sectionis punctum) perveniet ad punctum A, (ipsaq; AB degeneret in punctum,) erit angulo BAC, oppositus integer semicirculus; ideóq; angulus BAC rectus est. Et, quoniam idem accideret in quovis semicirculo, igitur anguli semicirculorum sunt æquales, nempe recti omnes. Sed & idem ostendi potest, etiam in aliis similibus segmentis. Ergo similium segmentorum anguli sunt æquales; tanti nempe quantus istorum peripheriarum semisses.

4° Idem hoc modo probatur. Quoniam in semicirculo angulus ABC rectus est, per 31 e 3; ideoq; anguli BAC, BCA, simul, æquales recto, per 32 e 1: Si igitur recta AB moveatur usq; dum perveniat ad situm AC, angulus BAC evanescit sive nullus erit, ideóq; BCA (qui jam fit angulus semicirculi) rectus erit; nam quod aufertur angulo BAC, additur angulo BCA, ut nempe ambo æquentur uni recto. Atq; idem ostendi potest in aliis segmentis similibus; nam, per 32 e 1, erunt BAC, BCA, simul, æquales residuo anguli ABC ad duos rectos; ideóq; cum ABC, in eodem vel similibus segmentis, semper idem maneat, erit summa angulorum BCA, BAC, eadem; adeóq; cum BAC prorsus evanescit erit reliquus BCA ipsi summæ æqualis. Similium igitur segmentorum anguli sunt æquales.

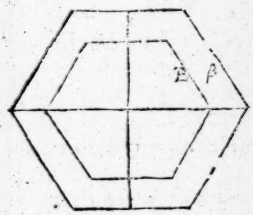
5° Idem arguo ex natura Parallelismi. Nam, ductis pluribus circulis concentricis, recta per centrum illos secans faciet angulos alternos æquales. Ideo semicirculorum anguli A, α, quamvis inæqualium æquales sunt.



Dicetur forsan, illud quidem valere in parallelis, rectis, per

29 e 1. non autem in lineis curvis utut parallelis.

Respondeo; Illud quidem speciatim ab Euclide demonstrari de parallelis rectis: At verò non minùs verum est de parallelis quibuscunq;. Non enim hoc oritur ex linearum rectitudine, sed ex earum parallelismo. Hujus enim affectionis vera causa hæc est: quoniam si, verbi gratia, rectæ B, β, parallelæ sint, erunt æqualiter ubiq; ab invicem distantes: At hoc non fiet nisi quanta sit unius versus alterâ inclinatio, tanta sit & hujus ab illa reclinatio: si enim recta β ad rectam B magis inclinet, quam hæc ab illa reclinat, erit earum ad invicem appropinquatio; si contra, elongatio; non autem eadem manebit distantia. Sed & idē omnino sequeretur in curvis: Nam, si peripheria α (*fig. præced.*) magis inclinet ad peripheriam A, quam hæc ab illa reclinat, vel cōtra; necesse erit ut earum distantia ab invicem mutetur, neq; cōstans maneat; quod tamen earum parallelismus supponit. Cum igitur eadem sit utrobiq; affectionis hujus causa, eadem erit utrobiq; affectio, sive in rectis sive in curvis; nempe recta parallelas secans angulos alternos æquales faciet: Et propterea, anguli semicirculorum, utut inæqualium, æquales erunt.



6°. Addo etiam; cùm illud in figuris aliis regularibus omnibus accidat, ut nempe in figuris similibus rectæ similiter positæ æquales respectivè angulos cum perimetris faciant; non credendum est illud in circulis secus esse: Eadem enim est omnino ratio in figuris trium, quatuor, quinq;, sex, aut quotviscunq; laterum, sive sint numero finita sive infinita; adeóq; & in circulo.

Verissimum quidem est, ejusmodi affectiones, quæ, in figuris regularibus, quoad mensuram decrescunt, prout laterum numerus augetur, aut contra; eas in circulo (qui est quasi polygonon infinitorum laterum) prorsus evanescere. Ut, verbi gratia, differentia rectarū quæ a centro ad latera perpendiculariter ducuntur, ab ipsis rectis quæ a centro ad angulos ducuntur; hoc est, rectarum a centro brevissimæ & longissimæ differentia:

Ideoq;

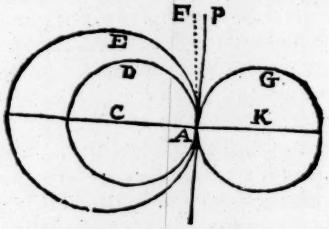
(ideóq; & differentia ſimilium figurarum circumſcriptæ & inſcriptæ eidem circulo:) eſt enim (cæteris paribus) in figuris plurium laterum minor differentia; adeoq; in circulo nulla. Item, in figuris plurium laterum, anguli in perimetro majores ſunt quàm qui in perimetris laterum pauciorum, adeóq; in circulo evaneſcunt, cujus tota perimeter eſt ideo una linea, indirectum poſita, licet non recta. Atq; idem in ſimilibus aliis affectionibus oſtendere liceret.

At affectiones ejuſmodi quæ æqualiter ſe habent & invariatè in figuris omnibus regularibus, ſive ſint plurium ſive pauciorum laterum, æqualiter etiam ſe habebunt in circulo, ſive polygono laterum infinitorum. quæ enim non omnino dependent a laterum numero, ſed a figuræ regularitate, eodem prorſus modo ſe ubiq; habebunt. Verbi gratia. Rectangulum, a centro ad perimetrum perpendiculari, & ſemiſſe perimetri, contentum, æquatur areæ figuræ regularis quotcunq; laterum; ut notum eſt: ideóq; & in circulo illud obtinet; quod oſtendit Archimedes lib. de dimenſione circuli. Item Polygona ſimilia ſunt ad invicem in duplicata ratione homologorum laterum, (vel etiam rectarum quarumvis ſimiliter poſitarum,) per 20 e 6: Sed & idem de circulis verum eſt, per 2, e 12. Item, Pyramis eſt triens priſmatis in baſi & altitudine iiſdem vel æqualibus conſtituti: ſed & eadem eſt ratio Coni ad Cylindrum, per 10 e 12. Atq; idem prorſus liceret oſtendere in aliis affectionibus innumeris; quæ, ſi omnibus figuris rectilineis regularibus quotcunq; laterum indiſcriminatim conveniant, nulla conſideratione habita ad laterum numerum, eædem & circulis pariter convenient. Adeóq; cùm in aliis figuris quibuſcunq; ſimilibus, utcunq; inæqualibus, rectæ ſimiliter poſitæ ſimiles cum perimetro angulos faciant; quidni & idem de circulis, aut circulorum ſegmentis dicendum eſſet? præſertim cum nihil ſolidæ rationis in contrarium adduci poſſit.

CAP. XI.

Objectioni in contrarium respondetur.

QUod enim in contrarium ostendi solet, hoc unicum est; Angulum semicirculi minoris, ut D A C, ideo minorem videri quam est angulus semicirculi majoris E [illegible] C, quia mi-

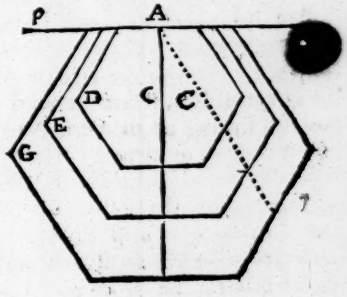


nor peripheria introrsum recedens a majori statim resilit, adeóq; partem solummodo anguli E A C videtur abscindere, quæ igitur toto minor erit: Et quidem angulus contactûs (cum lineâ rectâ tangente) E A P, eâdem de causâ minor videtur quam angulus contactus D A P, cùm hujus crura magis videantur divaricari & ab invicem resilire.

Verùm hoc, si rectè perpendatur, nihil suadet in contrarium eorum quæ a nobis proferuntur. Non enim magnitudo anguli æstimanda est ex eâ quam habent crura divaricatione extra punctum concursus, sed ex eâ quam habent in ipso concursûs puncto. Adeóq; angulus E A P minor est angulo F A P (per 16 e 3,) non quod illius crura minùs divaricentur extra punctum contactûs, (nam E P, magis distant quam F, P.) sed propter minorem inclinationem, seu potius coincidentiam, linearum E A, P A, in ipso puncto A. Inquam, *in ipso puncto* A: Nam, quamvis, ut ostendit Euclides, inter rectam P A & peripheriam E A, alia recta, ut F A, cadere non possit; hoc est, quæ minorem habeat inclinationem ad rectam P A quàm habet peripheria E A: Attamen hoc de alio quovis puncto præter ipsum A dici non potest; nullum enim aliud est punctum assignabile in curvâ E A inter quod & rectam P A non possit alia recta

recta cadere. Nam quodcunq; aſſignetur punctum (quod non toto ſaltem ſemicirculo diſtet ab A) poterit ab eo ad rectam PA recta duci, quæ & extra peripheriam cadet (verbi gratia, quæ peripheriam tangit in puncto aſſignato) & cum recta PA (ſaltem producta) concurret, quæ tamen aliâ rectâ ut FA poterit ſecari; quæ igitur inter aſſignatum peripheriæ punctum & rectam PA cadet.

Addo etiam, ejuſmodi divaricationem conſpici in aliis figuris regularibus ſe mutuo contingentibus. Ut in Hexagonis DA, EA, GA, ſe mutuo contingentibus in A: quorum Perimetri et ſe mutuo deſerunt, & rectam tangentem PA, quum primum ſuam quam in A habebant inclinationem mutant: at non propterea anguli CAD, CAE, CAG vel inter ſe differunt vel ab ipſo CAP. (Atq; idem omnino eveniet ſive recta CA ſit Hexagoni lateri pendicularis vel ad alium quemvis angulum conſtituta, modo ſimiliter poſita ſit in ſingulis figuris.) Quod autem de Hexagonis oſtenditur; ſimiliter eveniret, ſi, pro Hexagonis, ſtatuerentur aliæ figuræ ſimiles quotlibetcunq; laterum; ubiq; enim, in figuris ſimilibus, rectæ ſimiliter poſitæ, æquales cum perimetro angulos faciunt. Idem igitur & de circulis ſe mutuo contingentibus cenſendum eſt: Nam licet peripheriæ, propterea quod ſuam inclinationem in ſingulis punctis mutent, ſtatim poſt contactûs punctum ſe mutuo deſerant; non tamen in ipſo contactûs puncto variam habuiſſe inclinationem, vel angulos inæquales cum recta eorum per centra tranſeunte feciſſe, aut etiam cum alia quavis recta ſimiliter poſita, cenſendum eſt. Atq; hactenus de æqualitate angulorum, ſimilium ſegmentorum, diximus.



CAP.

CAP. XII.

Argumentum quartum, seu Argumentorum Classis quarta, quia quod omni positivâ quantitate minus est, est non-quantum.

ADjungam aliud Argumentum, seu potius aliam Argumentorum classem. Præmittam tamen hoc sive Axioma sive Postulatum.

Quod est omni positivâ Quantitate minus, illud est non-quantum.

Atq; hoc vel expresse assumitur, vel saltem tacitè innuitur; modò apud Archimedem passim, in libris De Sphæra & Cylindro, De dimensione circuli, De quadratura Parabolæ, De lineis Spiralibus, De æqui ponderantibus, &c, Sed & passim apud Euclidem, ut in 2e12, 18e12, aliisq; propositionibus innumeris; & quidem in iis ferè omnibus quæ demonstrantur per deductionem ad absurdum seu impossibile.

Exsemplum esto 1a Archim. *de dimensione circuli*; in hunc sensum: *Circulus æqualis est triangulo rectangulo, cujus laterum angulum rectum comprehendentium alterum quidem æquatur circuli semidiametro alterum vero ejusdem peripheriæ.* Hanc autem propositionem hoc modo demonstrat: Si enim triangulum illud sit vel majus vel minus circulo proposito; esto, inquit, differentia æqualis spatio (verbi gratia) A, aut alii cuivis assignato. At hoc, inquit, fieri non potest; Quoniam possibile est figuram rectilineam circulo inscribere (quæ igitur circulo minor erit) quæ tamen ab illo triangulo minus deficiat quam est spatium assignatum A quantulumcunq; sit; item figuram rectilineam circulo circumscribere (quæ igitur major erit) quæ tamen triangulum illud minus excedat quam est assignatum spatium A, quantulumcunq; demum sit; quorum utrumq; ab eo demonstratur: Non est igitur triangulum illud vel majus vel minus, quam circulus propositus, spatio quovis assignabili quantulumcunq; sit; est igitur æquale.

At verò, quàm facilè esset & hanc & innumeras alias demonstrationes eludere, si modò dicere liceat, Differentiam illam esse quidem omni assignabili quantitate minorem, non tamen nullam; ideóq; nec quantitates propositas esse æquales.

Vel

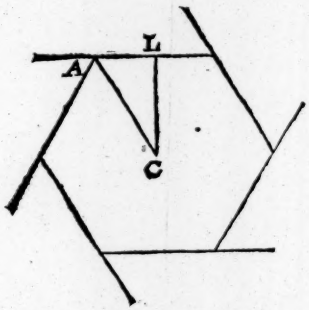
Vel igitur concedendum eſt, demonſtrationem illam Archimedis, aliaſq; ejuſmodi innumeras, apud omnes Geometras receptas, ſophiſticas eſſe & plane fallaces; quod neminem ſobrium dicturum exiſtimo: vel, quod potius aſſerendum erit, Differentiam illam, quæ eſt omni aſſignabili ſpatio minor, nullum eſſe: hoc eſt, Quod omni aſſignabili quantitate minus eſt, id nihil eſt, ſive non-quantum.

Hoc autem quod poſtulatur conceſſo, ſic licebit argumentari.

1° Subſtituamus aliquantiſper, pro circulo, Polygonum regulare rectilineum circulo inſcriptum quotviſcunq; laterum. Eſtóq; numerus laterum quantumlibet magnus, N; eritq; idem numerus angulorum Perimetri, (tot enim ſunt anguli quot latera,) quorum angulorum omnium aggregatum erit æquale angulis rectis $2N-4$, (per ea quæ habet Clavius ad 32 e 1) nempe bis tot angulis rectis, demptis quatuor, quot ſunt figuræ latera; Ergo angulus quilibet $\frac{2N-4}{N}$ unius recti: hunc autem biſecat recta a centro; quæ igitur angulum cum perimetro facit $\frac{N-2}{N}$ unius recti, vel $1-\frac{2}{N}$; hoc eſt, angulum rectum dempto $\frac{2}{N}$ recti: Differentia igitur iſtius ab angulo recto tanto minor eſt, quanto numerus laterum major; cum igitur numerus laterum augeri poſſit in infinitum, ita & differentia iſtius anguli a recto in infinitum minui, in eadem ſemper ratione quâ numerus laterum augetur. Ideóq; in Polygono infinitorum laterum, iſtius anguli differentia ab angulo recto eſt infinitè parva, (nam ſi fit N infinitum, erit $\frac{2}{N}$ infinitè parvum;) At, quod eſt infinitè parvum, illud eſt omni poſitivâ quantitate minus, ideóq; & non-quantum. Jam verò Polygonum infinitorum laterum, vel circulus eſt, vel ſaltem circulo inſcriptibile: Si prius; erit igitur differentia anguli ſemicirculi ab angulo recto infinitè parva: Si poſterius; erit ea differentia adhuc minor, (nam latus polygoni circulo inſcripti, cum extremitate diametri, angulum facit minorem quam facit peripheria cum eadem diametri extremitate, ideóq; magis

a recto deficit quam angulus Semicirculi.) Quod verò vel infinite parvum est, vel (si fieri potest) minus quàm infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, adeoq; non-quantum. Angulus igitur contactûs, quæ est differentia anguli semicirculi ab angulo recto rectilineo, est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

2° Potest & idem pariter ostendi hoc modo. Si figuræ cujusvis regularis singula latera producantur (versus unam partem) fient tot anguli externi, quot sunt latera; quorum omnium aggregatum æquatur quatuor rectis (per ea quæ habet



Clavius ad 32 e 1) ideoq; eorum quilibet $\frac{1}{N}$ quatuor rectorum. Supponamus jam, ut prius, Polygonum infinitorum laterum; erit igitur istius angulus externus, ($A = \frac{4}{N}$ rectis) quatuor rectorum pars infinite parva, (nam si sit N infinita, erit $\frac{1}{N}$ infinite parvum.) Est autem hic angulus, vel ille angulus contactûs de quo loquimur (si nempe polygonum infinitorum laterum habeatur pro circulo,) vel saltem illo major (per 16 e 3:) Si prius dicatur; est angulus contactûs infinite parvus: Si posterius, est adhuc minor: At quod vel infinite parvum est, vel minus quàm infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, ideóq; non-quantum. Est igitur angulus

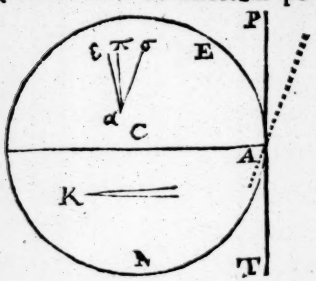
lus contactûs non-quantus. Quod erat ostendendum.

3° Quoniam magnitudo anguli tam externi A, quàm interni ejusve semissis C A L, æstimanda sit ex numero laterum, (ut ostensum est) adeóq; figuræ regulares eundem laterum numerum habentes habeant etiam ejusmodi angulos æquales: si concipiatur circulus ut Polygonum infinitorum laterum, concipienda sunt infinita latera unius circuli tot quot infinita illa latera alterius circuli (secus enim non essent circuli figuræ similes) & consequenter erunt tam anguli contactûs æquales quam anguli semicirculorum; (quod supra aliis argumentis contendimus:) Unde sequetur, Angulos contactûs esse non-quantos: ut supra etiam ostensum est.

4° Idem aliter sic patebit. Si a centro Polygoni regularis (vel, quod idem est, circuli circumscripti,) ducatur recta ad Polygoni perimetrum duos utrinq; angulos æquales faciens, erit illa vel lateri perpendicularis, & C L, vel ad figuræ angulum ducta ut C A; (nam, sicubi alias ducatur, manifestum est angulos obliquos fieri, & inæquales.) Manifestum etiam est, differentiam rectarum C A, C L, semper minui, prout numerus laterum augetur, usq; dum tandem in Polygono infinitorum laterum, sive Circulo, sit vel infinite parva vel nulla: sed hoc obiter. Supponamus jam, ut prius, pro circulo Polygonum infinitorum laterum: quoniam autem radius cum peripheria angulos facit æquales, (ut manifestum est) concipiendus est vel ut recta C L (ad medium lateris) vel ut C A (ad angulum:) si priùs supponatur; erunt anguli recti, (nam recta a centro ad medium lateris Polygoni regularis angulos rectos facit:) Si posterius; saltem (cum omnes radii sint æquales, adeóq; C A, C L, æquales) erunt anguli C A L, C L A, æquales per 5 e 1: ideóq; & uterque rectus: (Angulus autem A C L nullus erit, sed ipsa crura A C, L C, coincident.) Ultrumvis igitur supponatur, erit angulus semicirculi recto rectilineo æqualis; & propterea angulus contactus est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

5° Subjungam huic argumento etiam hanc speculationem non abimilis naturæ. Si angulus contactus E A P sit vere angulus; tunc & residuus ad duos rectos erit vere angulus, nempe E A T, vel P A N, qui continetur rectâ tangente & peripheria semicirculi remotioris, puta T A & A E, vel P A & A N.

neq; erunt lineæ T A, A E, aut P A, A N, in directum positæ, (nam lineæ in directum positæ non continent angulum, per 8 d 1.) At, hoc concesso, multo magis dicendum esset duas peripherias N A, A E, angulum continere; est enim curvatura N A E dupla curvaturæ T A E. quod si N A E non sit angulus, sed una linea continuata sive in directum posita, (prout concedi solet ab omnibus; quis enim dixerit in singulis peripheriæ punctis angulum formari?) neq; erit T A E vel P A N angulus, sed potius linea in directum posita; Et consequenter neq; P A E aut T A N angulus erit, sed potius lineæ coincidentes, quantum scilicet ad ipsum punctum contactus attinet.



Atq; hinc obiter discere licet, quo pacto duæ dissimiles lineæ, puta curva & recta, vel peripheria & parabola, vel etiam peripheriæ majoris & minoris circuli, aut etiam convexa & concava, &c. continuari possint. Quod monuisse sufficit.

6° Notum est, aream figuræ regularis quotcunq; laterum æqualem esse rectangulo quod semiperimetro & rectâ a centro ad perimetrum perpendiculari continetur; (sin recta illa non sit ad perimetrum perpendicularis, seu ad angulos rectos, secus erit,) At idem ostendit Archimedes, (prop. 1. de dimensione circuli,) de circulo; nempe aream circuli æqualem esse rectangulo sub radio & semiperipheria; Est igitur radius ad peripheriam perpendicularis, sive ad angulos rectos. Si enim angulus radio & peripheria comprehensus, minor esset recto rectilineo; esset area circuli minor quam ejusmodi parallelogrammum rectangulum. Nam illud quidem universaliter verum est; si duæ rectæ, quarum altera est semiperimeter figuræ regularis, altera recta ad latus ipsius quodlibet quocunq; angulo ducta, parallelogrammum eodem angulo contineant, erit hoc parallelogrammum aream istius figuræ regularis æquale, (ut probari potest ex 35 e 1.) Cum igitur parallelogrammum radio (hoc est, recta a centro) & semiperipheria comprehensum, quod a-

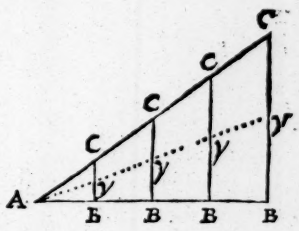
rex circuli æquatur, ſit rectangulum; manifeſtum eſt, & angulos quos illa recta a centro ad peripheriam facit, rectos eſſe & rectis rectilineis æquales. quod erat oſtendendum.

CAP. XIII.

Argumentum quintum: ex proportione evaneſcente, deductum.

SEquitur aliud argumentum. Cui hoc Lemma præponendum eſt; [*Si duæ quantitates ſimul proportionaliter vel creſcunt vel decreſcunt; ubi earum una reducta eſt ad nihilum ſeu non-quantum, etiam & reliqua ad nihilum ſeu non-quantum reducitur.*

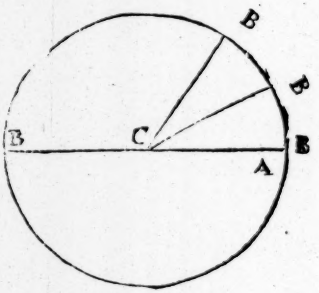
Exſemplum hoc eſto. Rectæ A B, A C, angulum A utcunq; faciant; ipſiq; A B ubivis inſiſtat B C angulum A B C rectum faciens (vel, ſi libet, alium ad libitum.) Jam ſi ſupponatur B C recta, ſuper rectam A B moveri invariato angulo ABC; prout punctum B remotius vel propius diſtat a puncto A, in eadem ratione recta B C augetur vel minuitur, per 4 e 6. Quoniam igitur



AB . AB :: BC . BC proportionales ſint, ubicunq; ſumatur punctum B; ſi, inquam, punctum B ſumatur idem quod A, adeóq; diſtantia A B nulla ſit, (propter coincidentiam punctorum A, B,) etiam & longitudo lineæ B C nulla erit. Quod, ſi opus eſt, probari poterit ex 16 e 6. Et quidem licet alibi alia ſit ratio rectæ A B ad B C quam ad B γ, tamen ſi B aſſignetur in ipſo A, tam B C quam B γ ſimiliter in punctum degenerant.

Exſemplum aliud hoc eſto. Quoniam, ſi recta C B, manente centro C, circumvolvatur; angulus B C D, & peripheria

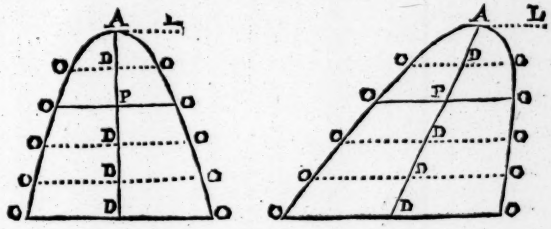
B A proportionaliter vel crescunt vel decrescunt, per 33 e 6: Ubi C B pervenerit ad situm C A, adeóq; (propter coincidentiam punctorum B, A,) peripheria evanescat, sive degeneret in punctum; etiam evanescit angulus B C A, & degenerat in non-angulum: Et, contra, ubi hoc fit, illud fiet. Quod etiam probari poterit, per 16 e 6.



Atq; idem pari modo fiet in aliis duabus quantitatibus quibusvis, quæ simul vel crescunt vel decrescunt proportionaliter. Prout liquet ex illa propositione 16 e 6. Quamvis enim ea speciatim de rectis lineis ab Euclide & affirmetur & demonstretur; attamen idem non minus verum esse de quibusvis quatuor proportionalibus nemo dubitat, cum idem sublit in omnibus fundamentum: unde notissima illa regula, quæ *Aurea* dici solet, originem ducit; quia nempe, ex quatuor proportinalibus, quod fit ex mutua multiplicatione mediorum, æquatur facto ex mutua multiplicatione extremorum. Ideóq; si mediorum alterum sit ciphra seu non-quantum, necesse est ut & extremorum alterum sit etiam ciphra seu non quantum: secus enim ea æqualitas factorum non prodibit.

Imò idem etiam omnino accidit, non modò ubi eadem est utriusq; quantitatis crescendi & decrescendi ratio, sed etiam ubi incrementi & decrementi ratio in una quantitate est rationis quæ in alia quantitate reperitur, duplicata vel triplicata (vel alio etiam aliquo modo immutata:) ut liquet in Parabola. Quoniam enim ordinatim applicatæ in eadem Parabola crescunt & decrescunt, non quidē in eadem ratione cum diametris, sed in subduplicata ratione diametrorum: ideo tamen, ubi harum alterutra redigitur ad non-quantum, etiam reliqua ad non-quantum redigetur. Verbi gratiâ, Quoniam in Parabolâ A O, prout Diametri punctum D aliud atq; aliud assumitur ita tam Diameter A D, quam ordinatim applicata O D, brevio-

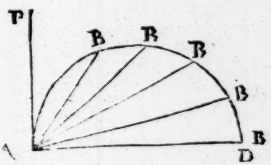
vior est aut longior; non tamen utraq; in eâdem ratione, sed



altera in alterius ratione duplicatâ; sunt enim diametri ad invicem, non ut ipsæ ordinatim-applicatæ, sed ut ordinatim-applicatarum quadrata, (prout notum est ex principiis Conicis,) nempe AD. AD:: ODq. ODq. Si tamen punctum D assignetur in ipso Parabolæ vertice A, adeo ut intercepta diameter AD nulla sit (propter coincidentiam punctorum A, D,) etiam & ordinatim-applicata OD nulla erit, sive nullius longitudinis; ut patet.

Sed & idem eveniet in Hyperbola, vel Ellipsi, aliâve ejusmodi curvâ; ubi tamen ratio diametri ad ordinatim-applicatas magis adhuc est intricata. Adeo ut Lemmatis veritas abundè constet.

His positis: sic procedit argumentum. Sit recta PA extremo diametri AD perpendicularis, adeóq; peripheriam ABD contingens in puncto A, unde recta AB (quantum opus est extensa) concurrat cum peripheriâ ubivis in B: circumducta jam recta AB secabit peripheriam in variis successivè punctis quorum quovis F insigniatur: semper autem hoc transitu, peripheria BA & angulus rectilineus BAP proportionaliter simul tam crescunt quam decrescunt, per 32 e 3 & 33 e 6. Ideoq;, ubi punctum B ad ipsum A pervenerit,



rit, adeoq; peripheria B A evaneſcat & nullius evadat magnitudinis, ſimul etiam angulus B A P evaneſcet & nullus fiet, ſive nullius magnitudinis. Eſt autem, hoc in caſu, angulus ille B A P, vel ipſe angulus contactus, vel ſaltem non ipſo minor; Ergo angulus contactûs nullius eſt magnitudinis, ſive non-angulus. Quod erat demonſtrandum.

CAP. XIV.

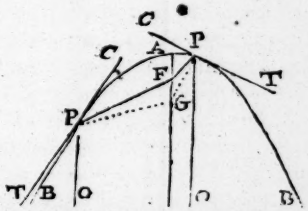
Argumentum ſextum, Ex Opticis petitum, & Sectionibus Conicis.

MOnet hic tandem Clavius, & quidem recte, *Id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, docetur; verum etiam eſſe de angulo contactus, qui in conicis ſectionibus efficitur: Ut enim demonſtrat Apollonius Pergæus lib. 1. prop. 32. In locum, qui inter coni ſectionem & rectam lineam tangentem interjicitur, altera recta linea non cadit: Adeo angulus ille contactus minor etiam eſt omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (ſi nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitatur perpendicularis) omni acuto rectilineo major.* Hoc ego quidem tanquam veriſſimum agnoſco, non modò de ſectionibus conicis, ſed & aliis quibuſvis curvis: nempe angulum contactus, qui ad illas efficitur, minorem eſſe omni angulo acuto, utpote qui ſit non-angulus; reliquum verò ad rectum, majorem eſſe omni acuto rectilineo, eſt enim rectus, & recto rectilineo æqualis: eſt enim hìc eadem ratio quæ in circulo. At hìc, inquit, *major abſurditas apparet, quoad ſenſum, in eâ Ellipſi quæ perexiguam habet latitudinem, & in ea Hyperbolâ quæ ferè linea recta eſſe videatur: valdeſenim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipſis & Hyperbolæ conſtituti.* Verum ego neq; majorem abſurditatem neq; omnino ullam hic conſpicio. Quamvis enim crurum divaricatio extra punctum contactus varia videatur; in ipſo tam contactus puncto non eſt varia linearum inclinatio, nec quidem omnino ulla. Et, ſi nihil abſurdi ſit, lineas contiguas in ipſo contactus puncto, æqualiter omnes *diſtare*, (hoc eſt, non omnino,) licet extra illud punctum earum diſtantiæ (pro varia ipſarum divaricatione) variæ ſint; cur magis abſurdum eſſet, earum omnium *inclinationes*, in puncto contactûs, æquales eſſe (hoc eſt, nullas) licet alibi ſint admodum inæquales? Aut etiam

tiam (quoniam ad ſenſus judicium fit provocatio) cur magis incredibile exiſtimem, acutam illam Ellipſin, & obtuſam Hyperbolam, in ipſis contactuum punctis, ad rectas tangentes pariter non-inclinari, quamvis poſtea varie divaricentur; quam, eaſdem pariter ſuas rectas non niſi in unico puncto contingere? Nam & hoc ſenſui non magis credibile videbitur; neq; tamen Clavius, credo, negaret.

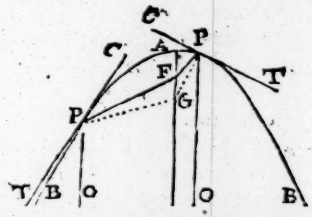
Quoniam verò de contactibus in Coni ſectionibus mentionem facit Clavius; videbimus & illic omnia noſtræ ſententiæ conſentanea. Inſtantiam deſumam ex opticis; quæ hæc eſto.

Tradit Vitellio, lib. 5. prop. 2. *Angulos incidentiæ & reflexionis, æquales invicem eſſe, in ſpeculis quibuſcunq;, ſive planis ſive concavis ſive convexis*: Atq; illud etiam agnoſcunt Optici omnes. Sed & idem Vitellio, lib. 9. pr. 43. oſtendit, *In ſpeculo concavo parabolico radios omnes, qui in illud ubivis incidunt axi parallelli, ad unicum idemq; punctum, qui Focus dici ſolet, reflecti*: Quod & poſt illum agnoſcunt alii Optici. Hoc autem ut demonſtret, oſtendit, ex Apollonio, lineam incidentiæ, & lineam reflectionis ad focum, angulos æquales cum rectâ contingente facere. Verbi gratiâ. Sit punctũ objecti, O unde ad ſpeculi punctum P ducatur recta OP, axi parallela: inde autem ad focum PF: Erunt anguli OPT, FPC,



(cum recta tangente CPT facti) æquales; ut Vitellio ex Apollonio demonſtrat; ideoq;, inquit, reflexio fiet ad punctum F: atq; idem fiet quodcunq; ſit punctum ſpeculi P, in quod radius OP axi parallelus inciderit. At oportuit oſtendiſſe, non tam angulos OPT, FPC, ad contingentem factos, æquales eſſe; quàm OPB, FPA, ad ſpeculum factos, æquales eſſe; angulum nempe incidentiæ & reflectionis in ſpeculo. Vel igitur æqualitas angulorum ad rectam contingentem, eandem infert æqualitatem angulorum ad ſpeculum; vel demonſtratio non procedit. Cùm igitur demonſtratio hæc pro legitima ſolet, quod ſciam, ab omnibus haberi; dicendum eſt eandem utrobiq; eſſe æqualitatem. Ideóq; cùm æquales ſint tam OPT,

FPC, anguli ad contingentem, quam OPB, FPA, anguli ad ſpeculum; erunt etiam (per 3 axioma primi Euclidis) anguli CPA, TPB, vel æquales, vel potius nulli. At manifeſtum eſt etiam, crura cruribus non utraq; congruere; nam ſi angulus alter alteri ſuperponatur, quamvis congruere poſſint crura PT, PC, attamen PB, PA, non congruent, neq; alterum



in altero jacebit, ſed tota PB, ſolo puncto B excepto, cadet inter ipſas PC, PA, ut nemo non concedet, qui Parabolæ naturam ſatis intelligit. Unde etiam manifeſto liquet, crura illa, quæ, extra punctum concurſus, variè divaricantur, poſſe tamen æquales angulos continere.

Verum ſiquis diceret (contra Vitellionem, aliósq; Opticos) Radium OP, non reflecti ad punctum F præciſe (quamvis ad illud quam proximè) eò quod exiſtimet angulum OPB, angulo FPA, non præcisè æqualem, ſed aliquantillo majorem, propterea quod angulus ablatus BPT, angulo ablato APC, minor videatur: Sic refutandi erunt. Si non ad punctum F fiat reflexio; eſto, ſi fieri poſſit, ad punctum aliud aliquod inferius in axe aſſignandum, (nam ad aliquod ſaltem axis punctum reflexionem fieri, nemo dubitabit,) ſitq; illud punctum G, ut tandem angulus reflexionis APG, fiat æqualis angulo incidentiæ OPB. Erit ergo angulus rectilineus FPG, differentia angulorum FPA, GPA, ſeu FPA, OPB, adeoq; angulorum APC, BPT; quod fieri non poteſt, cum ſit horum utervis omni angulo rectilineo poſſibili minor: non poteſt enim alia recta inter rectam contingentem & coni ſectionem cadere, per 32 lib. 1. Apol. Non ergo ſit reflexio ad G, ergo ad F; ideóq; tam anguli APF, BPO, quam CPF, TPO, ſunt æquales; ideóq; APC, BPT vel ſaltem æquales, vel potius

tius nulli. Idem igitur & de angulis contactuum in Conicis ſectionibus verum eſt non minus quàm in circulis. Sed & argumentorum præcedentium aliquot de ſectionibus conicis, aliiſve curvis, pariter atq; de circulis concludunt.

Poſtquam hoc totum negotium abſolveram, admonuit me (quod ante neſciebam) Clariſſimus vir D. *Sethus Ward*, apud nos Aſtronomiæ Profeſſor *Savilianus*, digniſſimus Collega meus, Cabbæum, in libro ſuo de Meteoris, Vitellionis demonſtrationem ut minus ſufficientem improbaſſe, ea quidem de cauſa quam & ego jam innui; adeò ut eam quam ſubjunxi confirmationem non omnino inutilem fuiſſe, ſed plane neceſſariam, jam reperiam.

CAP. XV.

Clavii Corollariis reſpondetur.

DEniq; myſteria aliquot hic adjungit Clavius, quaſi ex Euclidis propoſitione, prout ab ipſo eſt intellecta, emergentia. Ut illud Cardani;

Poteſt aliqua quantitas continuè & infinitè augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunq; ſit, minus ſemper erit decremento hujus: propterea nempe quod angulus contactus quantumvis multiplicatus, minor ſit angulo quovis rectilineo quantumvis diminuto.

Item illud ex Campano; *Tranſiri poſſe a minori ad majus, vel contra, & per omnia media, nec tamen per æquale.* Quod tantundem eſt acſi diceret, erectum quemvis in plano Horizontali ſtantem, poſſe dextrorſum ab Oriente ad Occidentem faciem convertere nec tamen interim ad Meridiem converſam habeat.

At hæc, & ſiqua ſunt ſimilia, cùm aliud non habeant fundamentum, quàm quòd ſupponant, *Angulum contactus vere quantitatem eſſe*, ulteriore refutatione non indigent. Sufficit enim demonſtraſſe, (quod abunde factum eſſe judico.) *Angulum contactus eſſe non-angulum*, ſeu *non-quantum*; & propterea, *Angulum Semicirculi æqualem eſſe recto rectilineo.*

INDEX CAPITUM

In Tractatu Præcedente.

I. *Anſa & ſtatus præſentis controverſiæ.*
II. *Controverſiam hanc ab Euclide diremptam non eſſe.*
III. *Anguli Plani natura & definitio explicantur.*
IV. *Argumentum primum, ab Inclinationis, Anguliq; plani, naturâ petitum.*
V. *Argumentum ſecundum; ab Angulorum Planorum ὁμωγνείᾳ dependens.*
VI. *Exceptionibus Clavii reſpondetur.*
VII. *Angulorum Planorum ὁμογίνια quatuor argumentis ulterius confirmatur.*
VIII. *D.* Henrici Savilii *Teſtimonium hac in re.*
IX. *Argumentum tertium; ab æqualibus ſimilium ſegmentorum angulis deſumptum.*
X. *Similium ſegmentorum angulos æquales eſſe, ſex Argumentis ulterius confirmatur.*
XI. *Objectioni in contrarium reſpondetur.*

XII.

XII. *Argumentum quartum*, (*ſeu argumentorum claſſis quarta, ſex diſtinctis argumentis conſtans,*) *hinc deſumitur, quoniam, Quod omni poſitivâ quantitate aſſignabili minus eſt, eſt non-quantum.*

XIII. *Argumentum quintum; ab evaneſcente proportione deſumptum.*

XIV. *Argumentum ſextum; ex Opticis petitum, & ſectionibus Conicis.*

XV. *Clavii corollariis reſpondetur.*

FINIS.

Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academiâ OXONIENSI,

DE

SECTIONIBUS CONICIS,

Nova Methodo Expositis,

TRACTATUS.

OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1655.

Clariſſimis Viris, & Mathematicis,

D. *SETHO WARD* S. T. D.

& D. *LAVRENTIO ROOK* M. A.

Publicis Aſtronomiæ Profeſſoribus; altero *Saviliano* in Academia *Oxonienſi*, altero *Greſhamenſi* in *Greſhamenſi* Collegio *Londini*.

JOHANNES WALLIS *Geom. Prof. SAVILIANUS.* S.

QUid novi ferat (Clariſſimi Viri) Libellus iſte, ab ipſo ſtatim quem præfert titulo innoteſcit. Nempe Sectiones Conicas (rem veterem) nova methodo tradit. Erat ſcilicet Conicorum traditio Veteribus jam olim cognita, Apollonio Pergæo vetuſtior, & quidem in methodum jam tum redacta; ut nec ipſe diffitetur Apollonius, & aliunde conſtat: (Nam Archimedes ipſe Apollonio antiquior, *Elementa Conica* ſæpius memorat:) ſed ab Apollonio, (cujus Conicorum libri quatuor ſuperſunt,) in meliorem formam redacta, & inſigniter aucta, (quod in cauſa fuiſſe credimus

dimus cur priora illa Elementa Conica perierunt.) Antiquiores enim illi, Coni solius Recti (quem solum Euclides definiverat) contemplationem aggressi, non aliam videntur ipsius sectionem considerasse quam quæ fit a plano quod ipsius lateri alicui rectum sit; quod propterea in Cono Rectangulo (eo nempe cujus opposita latera angulum in coni vertice rectum comprehendunt) opposito lateri maneret parallelum; in Cono Acutangulo, lateri oppositò occurreret; in Cono autem Obtusangulo, ab eo recederet. Atq; hinc curvas tribus illis sectionibus emergentes, appellabant, Coni Rectanguli, Coni Acutanguli, & Coni Obtusanguli, Sectionem; quibus etiam nominibus utitur Archimedes. Sed & propterea Conisectionum illarum nominibus, solas erectas intelligebant, non item Scalenas; (ut & Diametri nomine, solum intelligebant Axem; &, Verticis Sectionis nomine, axis verticem;) sectiones quippe Scalenas, sive inclinatas, non aliter tractabant quam ut Erectarum portiones; (quod & de Conoidibus pariter intelligendum erit.) Apollonius autem, præter Conum Rectum, etiam Scalenum introduxit, (& forsan primus,) & propterea Coni definitionem ab Euclide traditam (ut quæ soli recto conveniebat) in aliam (quæ etiam Scalenis conveniat) immutavit. Sed neq; solam illam plani secantis positionem (quæ coni latus recte secat, hoc est, ad angulos rectos) sed aliam quamlibet admisit; adeoq; Coni cujuslibet (sive recti sive scaleni) sectionem quamlibet plano utcunq; posito factam, consideravit. Adeoq; & sectionum nomina prius recepta necesse habuit immutare (quippe e Sectionibus tribus quamlibet invenit cuilibet cono inesse, prout planum secans alio atq; alio situ positum intelligatur,) quas igitur alii, Coni

Rectanguli

Rectanguli, Coni Acutanguli, Coni Obtusanguli, sectionem, appellaverant; ille Parabolam, Ellipsem, Hyperbolam, dicendas voluit: quæ nomina ab illius prop. 11, 12, 13, libri primi, originem duxerunt; atq; hactenus a Geometris retinentur. Sed & eidem Sectioni plures Diametros, inesse voluit, prout hujus illiusve coni sectione facta intelligatur; quarum singulæ sibi peculiares habent & vertices, & Ordinatim-applicatas, & Latera-recta. At fatendum interim est horum etiam non pauca, utut aliis nominibus, aliis antea, saltem Archimedi, innotuisse: hoc tamen discrimine, quod quæ *Coni Sectiones* (nempe inclinatæ) ab Apollonio dicuntur, eædem ab Archimede *Sectionis* (erectæ) *Portiones* dici videantur; (& similiter de Conoidibus:) ut in ipsius libro de Rectanguli Coni Sectionis quadratura (cui *de quadratura parabolæ* recentiores nomen fecerunt,) & in libris *de Conoidibus & Sphæroidibus*, passim est videre.

Hæc autem Conicorum doctrina, quamvis ab Apollonio satis Geometrice tradita (unde & *Magni Geometræ* nomen est adeptus,) aspera tamen adhuc mansit & difficilis, ut, qui illam ausus attingere, sit e paucis unus. Unde & nimis neglecta fuit, tanquam insuperabilis difficultatis plena. (Quod quidem eatenus obtinuit, ut ex libris Octo, quos scripserat Apollonius, non nisi primi quatuor ad nostras manus pervenerint;) Maxima quippe Geometrarum pars vel eo non accedebant plane, vel tanquam canis ad Nilum. Eamq; difficultatem quamvis aliquanto minuere conati sint Midorgius, aliiq;, minime tamen sustulerunt. Quam igitur pleriq; cane pejus & angue formidarunt, Conicorum Doctrinam, nos demulcendam suscepimus & levigandam, ut deinceps non minus tractabilis evadat

quam ipsa Euclidis Elementa; nec sit cur quis in posterum ipsius aggressum metuat. Quod quidem quousq; præstiterim, non est cur alios quam vos ipsos æquiores putem judices; qui pro ea qua polletis, ut in reliqua literatura, ita speciatim in Matheſi peritia provinciam quam suscepistis ornatis maxime.

Opus ipsum quod attinet; videbitis me, statim ab initio, Cavallerii *Methodum Indivisibilium*, quasi jam a Geometris passim receptam, tam huic quam ttactatui sequenti (qui huic gemellus est) substernere; (ut multiplici figurarum inscriptioni & circumscriptioni, quibus in ἀπαγωγαῖς aliàs utendum sæpius esset, supersedere liceat:) sed a nobis aliquatenus sive emendatam sive saltem immutatam: pro rectis numero infinitis, totidem substitutis parallelogrammis (altitudinis infinite-exiguæ;) ut et pro planis, totidem vel prismatis vel cylindrulis; & similiter alibi.

Schemata adhibui quam potui simplicia, ne intricatiores linearum ductus confusionem inferant: & quidem iisdem ubi fieri commode posset repetitis vel parum immutatis uti mallem quam ubiq; novis; quo magis fiant lectori familiaria. In quem etiam finem, iisdem ut plurimum literis eadem (per totum fere tractatum) puncta designamus, utut schemata fuerint immutata; atq; iisdem symbolis eadem designamus ubiq; quantitates: sed neq; illa fortuito assumpta, sed plerumq; cum delectu, ut ipse vel literarum vel symbolorum intuitus rem designatam aliquatenus referat; quæ quamvis non-necessaria videri possit curiositas, cum tamen & fantasiæ & memoriæ adjuvandæ inserviat, nonnullis forsan erit non ingrata, reliquisq; saltem inoffensa. In symbolis adhibendis, secuti sumus partim D. *Oughtredum* nostratem, partem D. *Carteſi-*

um

um (nisi velitis potius ut D. *Harriotum* nostratem nominem, qui in eadem fere semita D. *Carteſio* præivit) nonnunquam utrumq; ; prout vel hujus vel illius vel utriusq; notatio præsenti negotio explicando magis videbatur accommoda. Demonstrationes passim ex Arithmeticæ symbolicæ calculo petendas duxi, ut quæ brevitati simul atq; perspicuitati inserviunt maximè, quasq; non minus legitimas esse quam quæ vario linearum implexu fiunt non est cur quisquam dubitet. In toto deniq; operis decursu ea brevitate studuimus omnia præstare quæ perspicuitati non officiat.

Prolixum itaq; de Conicis tractatum non exhibemus ; adeoq; multa ab aliis tradita, nos consulto omisimus, quæ tamen, si opus videbitur, possit quilibet non magno negotio supplere, vel ex nostris deducere. Post enim præcipua fundamenta tradita, non erit difficile reliqua quasi totidem inde consectaria adjungere. Eritq; fortasse tractatus iste vel ipsa brevitate gratior, quam si minutiora sectando factus esset prolixior. Quicquid sit, vestro illud duxi aliorumq; Mathematicorum judicio permittendum. *Valete.*

Index ad Tractatum ſequentem.

Proœmium.

PROP. PARS I.

1 *De Figuris planis juxta indiviſibilium methodum conſiderandis*
2 *De Triangulo.*
3 *De Area Trianguli*
4 *De Triangulis æque-altis*
5 *De Coni*
6 *De Pyramide*
7 *De Cono Sectione*
8 *De Parabola, ſectione Coni facta*
9 *De Conoide & Pyramidoide Parabolico*
10 *De Conoideos & Pyramidoideos Parabolici Sectione*
11 *De Cuneo Parabolico*
12 *De Parabolæ Latere-recto*
13 *De Ellipſi, Sectione Coni facta*
14 *De Elliptico Pyramidoide & Conoide (ſeu Sphæroide) & Cuneo*
15 *De Conoideos & Pyramidoideos Elliptici ſectione*
16 *De Ellipſis Latere-recto*
17 *De Hyperbola, Sectione Coni facta*
18 *De Hyperbolico Conoide, Pyramidoide, & Cuneo*
19 *De Conoideos & Pyramidoideos Hyperbolici ſectione*
20 *De Hyperbolæ Latere-recto.*

PARS II.

21 *De Paraboba abſolute conſiderata.*
22 *Corollaria.*
23 *De recta Parabolam Contingente*
24 De Parabolæ *Diametris*
25 *Effectiones Geometricæ*

26 De *Ellipſi abſolute conſiderata*
27 De *Ellipſis Diametro-tranſverſa & verticibus oppoſitis*
28 *Corollaria*
29 De *Ellipſis Diametris Conjugatis*
30 De *recta Ellipſin Contingente*
31 De *Ellipſeos Diametris*
32 *Effectiones Geometricæ*
33 De *Hyperbola abſolute conſiderata*
34 De *Diametro tranſverſa & Hyperbolis Oppoſitis*
35 *Corollaria*
36 De *rectâ Hyperbolam contingente*
37 De *Hyperbolæ Diametris*
38 *Effectiones Geometricæ*
39 De *Hyperbolæ Aſymptotis rectis*
40 De *Hyperbolis Aſymptotis*
41 De *Hyperbolæ Diametris Conjugatis*
42 De *Hyperbolis Conjugatis*
43 De *Syſtemate Hyperbolico*
44 *Ellipſeos & Hyperbolæ Comparatio.*

APPENDIX.

45 De *Paraboloide Cubicali*
46 De *recta ipſum contingente*
47 De *ipſius Diametris*
48 De *Area Paraboloidis; Conoidis item vel Pyramidoidis ipſi accommodati*
49 De *Paraboloidibus aliis*
50 De *Ellipſoidibus & Hyperboloidibus.*

De Sectionibus Conicis

TRACTATUS.

Proœmium.

QUUM Sectionum Conicarum (quæ dici ſolent) doctrinam (prout vulgò tradi conſuevit) ſatis obſcuram animadverteram, atq; perplexis admodum Demonſtrationibus involutam: Totum illud negotium paulo attentiùs apud me perpendendum ſtatui; ut ſiquâ poſſem arte rem ſatis intricatam quadantenus extricatiorem darem. Quod & in ſequentibus (Divino favente auxilio) me aliquatenus aſſequutum eſſe confido.

In illum finem, *Conum* ipſum primò (unde, quæ dicuntur, *Coni-ſectiones* ortum trahere exiſtimantur) accuratius paulo conſiderandum duxi; ut inde Coniſectionum originem repeterem, earúmq; affectiones tanquam a vero fonte deducerem; Methodi ſaltem quâ & Apollonius Pergæus, *Magnus Geometra* dictus, & poſt illum tam Veteres quam Recentiores incedunt, fontes apperirem; qui in ipſis Demonſtrationi-

bus non ita ſemper eminent ut ſtatim perſpiciantur, & fortaſſis etiam nonnunquam ſtudio occultantur. Non tamen ea methodo totam Coni-ſectionum doctrinam proſequor; ſed eouſq; ſaltem procedo donec primarias atq; eſſentiales earum affectiones detexerim, ut ipſarum natura atq; eſſentiales characteres innoteſcant, ut inde reliquæ deinceps affectiones calculo deduci poſſint; (Quod etiam in ſequentibus factum eſt.) Atq; hoc quidem præſtitum eſt in propoſitionibus, ſive Sectionibus viginti primoribus. Inſertis interim obiter nonnullis de Conoidibus & Pyramidoidibus (quatenus ſine nimia digreſſione commodè fieri potuit;) & præmiſſis aliquot quaſi Lemmatibus neceſſariis.

Deinde, ſepoſitis quæ a Cono dependent menſuris, aliiſq; in eorum locum ſubſtitutis, quæ Coni-ſectionem ubiq; (ſive in Cono, ſive extra Conum,) comitentur; Coni-ſectiones (vulgò dictas) Cono liberatas atq; exemptas, abſolutè (nullo ad Conum reſpectu habito) conſiderandas ſuſcipio, (totam tractationem quaſi de novo exorſus,) tanquam totidem lineas (ſive figuras) curvas in plano deſcriptas, quæ vel Sectione Coni, vel etiam aliis modis infinitis effici poſſent. Neq; enim Parabola, Ellipſis, aut Hyperbola, a Cono ſecto magis neceſſariò dependent, quàm vel Peripheria vel etiam Triangulum, (quæ quidem & ſecto Cono, & aliis mille modis produci poſſunt:) Ideóq; ſimpliciùs atq; univerſaliùs tradi & poſſunt & debent.

Deniq;, Appendicis loco, ſpecimen exhibere libuit ampliandæ Curvarum doctrinæ; (ſicut &, in progreſſu, Conoideon & Pyramidoideon, tam erectorum quàm ſcalenorum, quod tamen nemo, quod ſciam, antea fecerat, doctrinam attigeram; cum antea Conoideon non niſi rectorum, nec quidem Pyramidoi-

deon

dem omnino, ratio ulla habita fuerit:) adjunctâ ad caleem novâ, nec ab ullo (credo) antehac tentatâ Paraboloidem ſpeculatione.

Atq; hæc ſunt quæ in ſequentibus exſpectet Lector μικρομερῶς; brevi quantum potui methodo tradita, nec tamen ea propter obſcuritate involuta. Ideóq; prolixam, quam nonnulli affectare videntur, numeroſæ Lemmatum & Propoſitionum ſeriei, linearibus ubiq; demonſtrationibus, ſat quidem longis nonnunquam atq; involutis, comprobatorum, pompam diffugiens; ipſas ut plurimum non modò ἐκθέσεις, ſed & ἀποδείξεις (ubi id levi commonitione tanquã in tranſitu præſtari poſſit, nec Propoſitionis ſeriem nimis conturbet) ipſis Propoſitionibus inſerui, brevitati ſimul & perſpicuitati conſulens: Demonſtrationibus etiam (eâdem de cauſa) potius ex Arithmetico calculo petitis (Arithmeticam *ſpecioſam* intellige) rem agens, quàm linearibus; cùm illæ nec minùs ſcientificæ ſint, & magis perſpicuæ, ſed et ſimpliciores ſunt atq; magis univerſales, nec quiſquam eſt (quod ſciam) qui Demonſtrationes Arithmeticas in Geometria admittendas negaverit; & quidem (præterquam ubi de Angulis aut Inclinationibus agitur, alióve aliquo ſitu locali, aut quæ immediatè hinc dependent,) non video quorſum linearibus ductibus in demonſtrando admodum opus ſit, cùm ea omnia quæ ex Rationibus ſive Proportionibus ordinandis, alternandis, invertendis, convertendis, componendis, dividendis, addendis, auferendis, &c. dependent, non magis Geometrica ſint quàm Arithmetica, ne dicam potius purè Arithmetica, quanquam (ut Arithmetica omnia) tam rei Geometricæ quàm aliis etiam diſciplinis Mathematicis ſæpiſſimè immiſceantur.

His Præmonitis, rem ipſam aggredior.

PARS PRIMA.

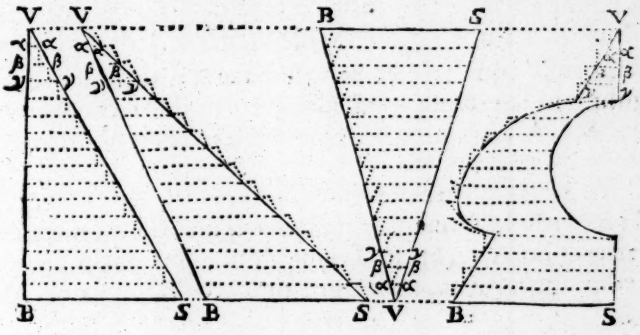
PROP. I.

De Figuris planis juxta Indiviſibilium methodum conſiderandis.

SUppono in limine (juxtâ Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indiviſibilium*) Planum quodlibet quaſi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potiùs (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem ſingulorum altitudo ſit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, ſive aliquota pars infinite parva; (eſto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeóq; omnium ſimul altitudo æqualis altitudini figuræ.

VTrovis autem modo res explicetur (ſive per infinitas lineas parallelas, ſive per infinita parallelogramma æquè alta infinitis illis lineis interjecta) eodem res redibit. Nam Parallelogrammum cujus altitudo ſupponitur infinite parva, hoc eſt, nulla, (nam quantitas infinite parva perinde eſt atq; nonquanta,) vix aliud eſt quàm linea. (In hoc ſaltem differunt, quòd linea hæc ſupponitur dilatabilis eſſe, ſive tantillam ſaltem ſpiſſitudinem habere ut infinitâ multiplicatione certam tandem altitudinem ſive latitudinem poſſit acquirere, tantam nempe quanta eſt figuræ altitudo.) Nos igitur deinceps (partim quod ille mos loquendi in Cavallerii methodo de *Indiviſibilibus* videatur obtinuiſſe, partim etiam ut brevitati conſulamus) Linearum potiùs quàm Parallelogrammorum nomine partes illas figurarum infinite exiguas (ſive altitudinis infinite exiguæ) nonnunquam appellabimus, quando ſaltem determinatæ

natæ altitudinis consideratio non habetur; Ubi autem determinatæ altitudinis instituetur consideratio (quod aliquando fiet) exiguæ illius altitudinis eoutq; ratio habenda erit, ut ea infinities multiplicata totam figuræ altitudinem supponatur adæquare.



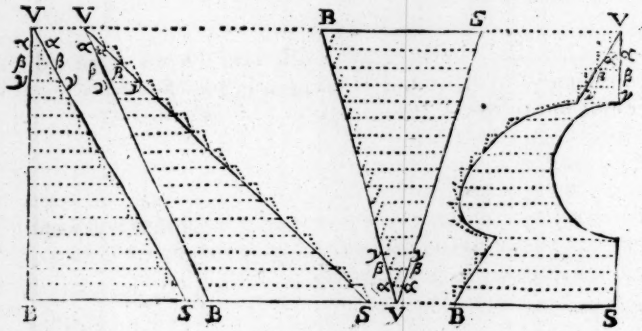
Quod autem de Lineis & Parallelogrammis perinde nominandis, dictum est, intelligendum etiam erit de Circulis & Cylindrulis, vel etiam de Planis quibusvis & Prismatibus super illa plana constitutis: dummodo supponantur tantam sive crassitiem sive altitudinem habere quanta est $\frac{1}{\infty}$ *altitudinis illius figuræ quam constituunt.* Nam Cylindrus nullius altitudinis, vel infinite exiguæ, quid aliud, est quam Circulus? & Prisma, altitudinis vel nullius vel infinite exiguæ, perinde atq; Planum tractari poterit. Atq; hoc jam statim ab initio monendum esse duxi, ne sæpiùs illud deinceps repetere necesse foret.

PROP. II.

De *Triangulo.*

SI Triangulum rectâ, basi parallelâ, secetur, erit abscissum Triangulum secto simile; & propterea latera habebit proportionalia (ut notum

est.) Adeóq; , si Triangulum quodvis V B S, rectis quotcunq; $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$. &c. basi B S parallelis, & æqualiter ab invicem diffitis, secetur; quæ propterea Crurum utrumvis (adeóq; & utrumq;) dividant in segmenta æqualia, (& propterea etiam totum Triangulum in segmenta æquè-alta:) erunt illæ rectæ $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. Arithmeticè proportionales: (sunt enim inter se $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. ut Vα, Vβ, Vγ, &c. hoc est, ut 1, 2, 3, &c. propter æquales excessus Vα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, &c.) Ideóq; si rectæ illæ supponantur numero infinitæ, erit omnium series, (hoc est, totum Triangulum, per prop. præced.) aggregatum rectarum numero infinitarum A-



rithmeticè proportionalium, quarum minima est punctum V (verticis nimirum) maxima verò est B S basis Trianguli.

Atq; idem continget si infinitis illis rectis supponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum singulorum altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli: Erunt scilicet & illa Arithmetice proportionalia. Cùm enim æque-alta sint, sunt & basibus proportionalia.

Hæc

Hæc autem omnia Parallelogramma ſimul ſumpta, figuram conſtituent Triangulo illi ſive inſcriptibilem ſive circumſcriptibilem, (cùm omniũ baſes ſupponantur Triangulo aptari:) quò autem plura ſunt (in ejuſmodi figurâ inſcripta vel circũſcripta) Parallelogrãma, eò minori ſive exceſſu ſive defectu differt figura illa a Triangulo cui adſcribitur; adeóq; (cùm ſupponantur infinita, erit differentia illa infinite exigua, hoc eſt, nulla; atq; propterea ſupponenda ea figura ſic adſcripta (ex Parallelogrammis infinitis Arithmetice proportionalibus conflata) Triangulo æqualis, ſeu potiùs eadem: Eadem quidem lege qua Polygonum regulare infinitorum laterum, (ſive inſcribi ſupponatur ſive circumſcribi) pro Circulo haberi ſolet.

Quod ſi quiſpiam ſit qui noluerit hoc concedere, poterit ille notiſſima methodo Apagogica cogi: multiplicatis nempe eouſq; Parallelogrammis, ut differentia tandem quavis aſſignatâ quantitate minor ſit. Ego verò ejuſmodi ἀπαγωγὰς ſuperſedendum eſſe exiſtimo, partim ne Lectori nauſeam crearem ejuſmodi cramben ſæpiùs iterando, partim quia nemo eſt in Mathematicis paulò exercitatior, qui non poterit (ſi ipſi opus eſſe videatur, tantíq; ſuperſit otii) ſupplere, cùm ea Methodus demonſtrandi tam apud Veteres quam Recentiores paſſim occurrat.

Quod autem de Triangulo jam dictum eſt, illud nempe figuræ ex infinitis Parallelogrammis conflatæ (ſive inſcriptæ ſive circumſcriptæ) æquale eſſe, ſeu potius eandem figuram; intelligendum erit de quâvis aliâ figurâ planâ; cùm eadem ſit in omnibus demonſtrandi ratio. *Nec quidem Planis ſolummodo, ſed & figuris Solidis illud convenit: ſi nempe pro Parallelogrammis ſubſtituamus Priſmata:* (qua voce etiam Cylindrulos comprehendi volo, aut etiam ejuſmodi quaſvis figuras inter parallela plana ſimilia, ſive rectilinea ſint ſive curvilinea ſive miſta, æquabiliter poſitas; ne longis verborum ambagibus utendum ſit.) Atq; hoc ſemel moneo, ne quis deinceps novas Demonſtrationes exſpectet, quotiès idem de aliis figuris dicendum occurret.

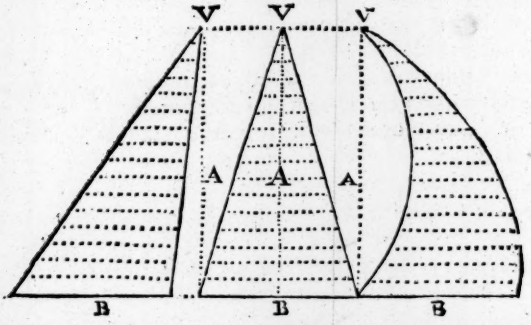
PROP.

PROP. III.

De Aread Trianguli.

CUm Triangulum conſtet ex infinitis ſive lineis, ſive Parallelogrammis, Arithmeticè proportionalibus, a puncto inchoatis & ad baſin continuatis, (ut patet ex jam dictis:) Erit Area Trianguli æqualis Baſi in Altitudinis ſemiſſem ductæ.

Eſt enim notiſſima apud Arithmeticos regula; *Summam Arithmeticæ progreſſionis, ſive omnium quotcunq; terminorum aggregatum, æ-*



quari aggregato extremorum in ſemiſſem numeri terminorum ducto. Adeóq;, ſi terminus minimus ſupponatur ○, (prout hîc ſupponitur, tantundem enim valet punctum in magnitudine atq; o Ciphra in numero;) idem erit extremorum aggregatum atq; ipſe terminus maximus. Altitudinem verò figuræ, pro numero terminorum in Progreſſione, ſubſtituo, hac de cauſa, Quoniam cũ numerus terminorum ſupponatur ∞, erit omnium longitudinum aggregatum $\frac{\infty}{2}$ Baſis, (quia Baſis jam eſt extremorum aggregatum;) cùm autem cujuſlibet (lineæ vel parallelogrammi) craſſities ſive Altitudo ſupponatur $\frac{1}{\infty}$ Altitudinis trianguli,

li, & in illam tota longitudinum ſumma ducenda eſt; adeoq; $\frac{1}{\infty}$ A in $\frac{\infty}{2}$ B erit area. Eſt autem $\frac{1}{\infty}$ A × $\frac{\infty}{2}$ B = $\frac{1}{2}$ AB. Adeò ut $\frac{1}{\infty}$A (figuræ altitudo) non ſolum longitudinum numerum, ſed eundem in communem omnium altitudinem ductum, exhibeat; quæ quidem communis altitudo tantò minor ſupponenda eſt, quanto termini ſeu longitudines ſunt plures.

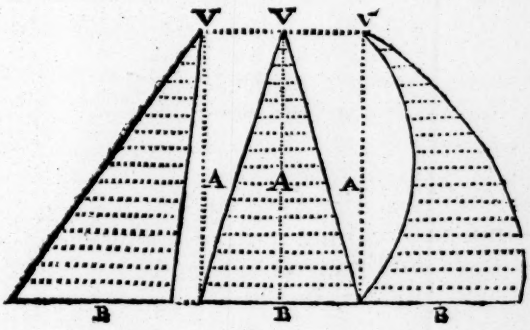
Notandum autem eſt, *Hoc non ſolummodo in veris Triangulis (rectilineis) valere; ſed & idem pariter evenire quamvis crura ſint vel curvilinea, vel quomodocunq; a rectitudine diſtorta, modo rectæ omnes baſi parallelæ ſint ſuis a vertice diſtantiis proportionales, adeoq; inter ſe Arithmeticè proportionales.* Ejuſmodi vero figuram, cum ſit Trianguli inſtar, *Triangulum diſtortum, luxatum*, aut *deformatum*, licet appellare.

PROP. IV.

De Triangulis æquè altis.

HInc ſequitur; Triangula ſuper æqualibus baſibus æquè-alta, (ſive rectangula ſint ſive obliquangula, ſive item ſint æquicrura ſive ſcalena, ſive quocunq; modo luxata,) eſſe inter ſe æqualia.

Cùm enim in calculo nulla angulorum ſitûve habeatur



L ratio,

rario, ſed Baſis ſolummodo & Altitudinis; modo de his conſtet, conſtabit etiam de area Trianguli.

Quod autem de Æqualitate dictum eſt, facile poteſt etiam Proportionalitati accommodari. Quod & ſæpius deinceps erit intelligendum.

Has vero duas de Area Trianguli Propoſitiones, non ideo hic inſerendas indicavi, acſi novum quid aut inauditum in ſe contineant, (quis enim hæc non ſcit?) ſed ut via ſternatur conſimili argumentationi in aliis figuris ſive planis ſive ſolidis. *Si enim æquales ſint tam baſes quam altitudines, omniaq; intermedia (ſive Parallelogramma ſive Priſmata) eâdem ratione vel creſcant vel decreſcant, æquales etiam erunt figuræ quamvis earum altera erecta ſit altera vel inclinata vel quocunq; modo luxata.* Nam cùm infinitæ partes unius infinitis partibus alterius ſigillatim æquentur, (quanquam fortaſſis in alio ſitu reperiantur,) erunt & aggregata æqualia.

Atq; hoc quidem ſemel & univerſaliter monſtraſſe ſufficiat, ne varias deinceps propoſitiones particulares, citra neceſſitatem, multiplicare cogar.

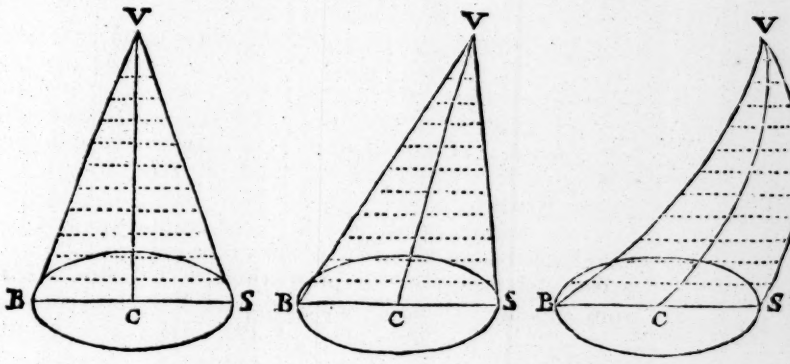
PROP. V.

De Cono.

SI infinitæ Rectæ parellelæ ex quibus conflari ſuponitur Triangulum, fiant totidem Circulorum parallelorum diametri; formabitur figura ſolida quæ *Conus* dicitur.

Rectáq; a Trianguli vertice V (qui & *Coni Vertex* eſt) ad Baſis B S punctum medium ducta, puta V C, (quam *Trianguli Diametrum* vel *Axem* libet appellare) biſecabit etiam reliquas Trianguli rectas baſi parallelas (totúmq; triangulũ) adeóq; per ſingulorum circulorum parallelorum centra tranſibit; ideóq; propterea *Axis Coni*; Triangulúmq; expoſitum, V B S, per Axem Coni tranſiens, ipſum Conum ejúſq; parallelos

lo Circulos biſecabit: Circulúſq; ille cujus diameter eſt baſis Trianguli, *Coni Baſis* dicetur.



Conus autem ſic formatus, ſi tam expoſiti Trianguli Crura ſint æqualia, quàm circulorum plana plano Trianguli recta, erit *Conus Rectus*, (utpote cujus Axis eſt Baſi perpendicularis, qui propterea *Axis Rectus* dici ſolet;) ſi verò vel altera vel alterutra illarum conditionum deſit, (puta ſi vel expoſitum Triangulum ſit inæquicrurum, vel plana circulorum plano Trianguli obliquè inſiſtant,) erit *Conus Scalenus*, hoc eſt inclinatus vel obliquatus, (cujus nempe Axis *Baſi* obliquè inſiſtit, atq; *Axis Obliquus* dici ſolet:) ſi vero Triangulum Diſtortum fuerit, fiet & *Conus Diſtortus*, non verus Conus.

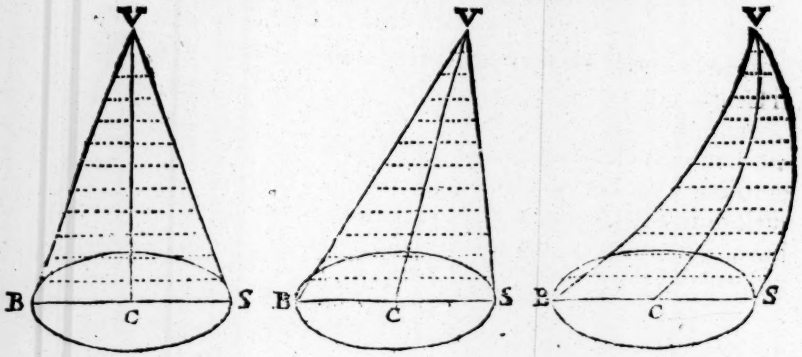
Prout autem Triangulum poteſt (productis infra baſin cruribus) in infinitum continuari; ita & Conus pari modo continuandus ſupponitur.

Atq; etiam, ſicut (continuatis, poſt decuſſationem, Trianguli cruribus ſupra verticem) aliud formari po-

teſt κατὰ κορυφὴν Triangulum (quod *Triangulum oppoſitum* appellamus,) ita et *Oppoſitum Conum* formari ſupponendum eſt.

Pleraq; in propoſitione (præterquam quod Definitiones ſint) per ſe ſatis patent, nec ulteriori egent Demonſtratione. Unicum opus eſt, ut oſtendam, nempe *Figuram ſolidam ſic formatam*, (ſi Conum Diſtortum eximas,) *talem Conum eſſe qualem definit Apollonius*: Vel, quod idem eſt, Parallelos circulos coni noſtri parallelis Circulis coni Apollonii congruere. Quod quidem verum eſt.

Nam (propter paralleliſmum Circulorum, adeóq; & eorum Diametrorum in eodem plano exiſtentium, iſtaſq; Diametros diſtantiis a vertice proportionales,) ſi latus alterutrum, expoſiti Trianguli per axem, puta VB circumferatur ſecundum circuli unius (puta Baſis) Peripheriam tranſibit etiam per Peripherias reliquorum, Radiorum extremitates lambens (qui ubiq; ſunt diſtantiis a vertice proportionales & baſis radio paralleli, adeóq;, durante tota circumductione, triangulo quod Axe trianguli expoſiti, recta circumducta, & baſis radio comprehenditur, ubiq; accommodatur) totámq; figuram deſcribet



deſcribet: Quæ eſt Apollonii conſtructio Coni. Conus igitur a nobis formatus idem eſt cum Apollonii Cono: Quod erat oſtendendum.

Atq; hinc etiam ſequitur, *A vertice ad quodvis ſuperficiei Conicæ punctum rectam duci poſſe.*

Recordandum interim eſt, (quod ſupra univerſaliter monuimus) ſicut lineis trianguli, ita planis Coni, aliqualem craſſitiem concedendam eſſe, quanta nempe eſt $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Coni: vel, quod idem eſt, Circulorum appellatione, cylindrulos numero infinitos, tantæ quidem altitudinis, ſuper circulis illis conſtituros intelligendos eſſe; qui igitur ſolidum ex infinitis cylindrulis cono vel inſcriptum vel circumſcriptum ſupponuntur conſtituere; quod ſolidum idem eſſe cum cono, eodem argumento concluditur quo uſi ſumus de Triangulo, Prop. 2.

Coni autem *Altitudo*, menſuratur perpendiculo a Vertice ad planum Baſis demiſſo; adeóq; eadem eſt cum altitudine Trianguli, ſi circuli ſint triangulo recti, (erit enim perpendiculum illud in ipſo trianguli plano, adeóq; ipſius etiam baſi, ſaltem productæ, perpendicularis, ejus altitudinem metiens;) ſin ſecus, minor erit; tunc enim perpendiculum ad baſin trianguli demiſſum, erit ad Coni baſin obliquum, adeóq; majus perpendiculo altitudinem Coni metiente.

Notandum tamen inſuper eſt, Conum formari poſſe, non modo ſi expoſiti Trianguli rectæ parallelæ, ſint circulorum Diametri, verum etiam ſi circulis (vel quidem ſimilibus Ellipſibus) alio quovis modo ſimiliter aptentur; (quod, ſi opus ſit, facile eſt demonſtratu; nos autem obiter tantùm monemus:) Verùm, eo caſu, Triangulum illud non neceſſario per Axem Coni incedet, neq; ea omnia conſequentur ſymptomata quæ hinc dependent.

Si verò, pro Circulis, ſubſtituantur totidem Figuræ rectilineæ, (aliæve vel curvilineæ vel miſtæ, præter circulos & Ellipſes,) non quidem Conus, ſed ſaltem *Pyramis* emerget: Cui & ea omnia facilè accommodari poſſunt (mutatis mutandis) quæ de Cono (hoc eſt, Pyramide rotundâ) diximus. Pyramidis autem nomen hìc latiori ſenſu accipiendum volo, quàm ut ſolis figuris rectilineas baſes habentibus conveniat; ita nempe ut baſes planas quaſcunq; admittat, (ſicut & de Priſmate ſupra dictum

ctum est ad Prop. 2.) ne scilicet longis verborum Ambagibus utendum esset. Adeóq; ---

PROP. VI.

De Pyramide.

Pyramidis voce (sub quâ & Conum comprehendo) intelligo Figuram solidam ex infinitis planis circa eundem Axem rectilineum ordinatim-positis conflatam; quorum omnium crassities supponuntur invicem æquales (nempe ∞ altitudinis figuræ solidæ,) diametri verò (vel homologa latera, aut etiam rectæ quævis similiter positæ) distantiis a vertice proportionales; adeóq; ipsa plana in duplicatâ ratione distantiarum a vertice. (sicut & *Prismatis* nomine intelligo ejusmodi planorum aggregatum invicem æqualium.)

Si autem Pyramis plano per verticem secetur; manifestum est plana similia (parallela) similiter secari; communes ergo sectiones (planorum secantis & sectorum) sunt infinitæ rectæ arithmetice proportionales (nempe, in subduplicata ratione figurarum, hoc est, in ratione distantiarum a vertice) adeoq; omnium aggregatum erit triangulum; per Prop. 2.

Axem vero Pyramidis (ut & Prismatis) appello, Lineam a vertice ductam, similium planorum parallelorum omnium centra conjungentem. *Plana* vero ad Axem *ordinatim-posita*, appello, quæ parallela, & similia similiterque posita, centra habent in axe.

Si verò, vel quòd triangulum, unde formari supponitur Pyramis, non sit rectilineum, (sed curvilineum, seu quocunq; modo deformatum,) aut ob aliam quamliber rationem, Planorum centra non sint in eâdem rectâ; vel ipsa plana circa eun-

dem

dem Axem non ſint ſimiliter poſita, (ſed ſpirali putà, vel alio quovis modo diſtorta;) modò interim plana ſint ſimilia & æqualiter craſſa, debitamq; ad invicem rationem retineant; *Pyramis luxata, uiſtorta*, vel *deformata* dici poteſt. (Quæ etiam de Priſmate, aliiſq; figuris ſolidis, pariter intelligenda ſunt.) Lineaq; omnium centra conjungens (ſi recta non ſit) *Axis diſtortus* dici poteſt.

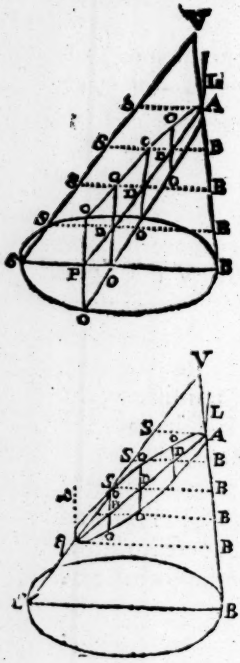
PROP. VII.

De Coni Sectione.

SI a puncto quovis, ut A, in Trianguli VBS (per Axem coni incidentis, & circa quod ſupponitur Conus formari) utrovis Crure, recta ducatur Triangulum ſecans (puta AP, AE, AH;) ſuper quam intelligatur Planum plano Trianguli ita inſiſtere, ut aliquem ex parallelis Coni circulis (ſi ſaltem ipſis parallelum non ſit) ſecet ſecundum rectam OO, quæ ſit iſtius circuli diametro puta BS, (in triangulo VBS exſiſtenti) perpendicularis, (adeoq; & reliquos quos ſecat circulos iſti parallelos ſecet ſecundum rectas ipſorum diametris in eodem triangulo exſiſtentibus perpendiculares, quæ propterea & ipſi OO parallelæ erunt; ut ſtatim demonſtrabitur:) communis Sectio ſuperficierum Coni, planiq; ſecantis (puta OAO,) *Sectio Conica* vel *Coni-Sectio*, dici ſolet; Et quidem vel Parabola, vel Ellipſis, vel Hyperbola: Nempe *Parabola*, ſi recta ſic ducta ſit reliquo cruri parallela (adeoq; nuſquam ipſi, quantumvis utrinq; producatur, occurrens) ut AP: *Ellipſis* vero, ſi recta ſic ducta ad crus oppoſitum vergat, (adeoq; ipſi, ſaltem producto, ſit infra verticem occurſura,) ut AEa: *Hyperbola* deniq; ſi recta ſic ducta ab oppoſito crure recedat, ut AH,

(quæ

(quæ igitur ex contraria parte producta oppoſito cruri ſupra verticem continuato, occurret, puta in a.)



Punctum autem A, coni-Sectionis *Vertex* dicitur; & quidem A, a, (in Ellipſi & Hyperbola) *Vertices oppoſiti*. Rectæq; AP, AE, AH, coni-ſectionum *Diametri*, (nempe AP Parabolæ, AE Ellipſis, AH Hyperbolæ:) ipſaq; A a (Ellipſeos vel Hyerbolarum) *Diameter tranſverſa*: (idem nempe planum quod Hyperbolam in uno aliquo cono efficit, cum etiam ad Oppoſitum Conum pertinget, *Oppoſitam Hyperbolam* ibidem efficit.) Rectam autem OO, reliquaſq; ipſi in eadem Con-ſectione parallelas

parallelas, (totidem parallelis in Cono circulis, & Coni-sectioni communes,) *Ordinatim-subtensas*, sive *Ordinatim inscriptas*, appello: quæ, cum sint circulorum diametris perpendiculares, (ut constructio postulat,) ab ipsis bisecantur, adeoq; & a Coni-sectionis Diametro, (quæ nempe per eadem bisectionum puncta transit;) Earúmq; semisses, ut D O, diametro Coni-sectionis *Ordinatim-applicatæ* dicuntur; suntq; inter bina diametri circularis (cui perpendiculariter insistunt) segmenta, B D, D S, mediæ proportionales: Quæ quidem si diametro Coni-sectionis A D, ad angulos rectos insistant, Diameter illa *Axis* dici solet (qui suis ordinatim-applicatis est perpendicularis;) sin minus, saltem Diameter, vel *Diameter Obliqua* vel *inclinata* dici solet.

Ut autem Conus ipse, sic & Coni-sectiones (Parabolam intellige & Hyperbolam, nam de Ellipsi secus est,) simul cum Cono in infinitum continuandæ supponuntur.

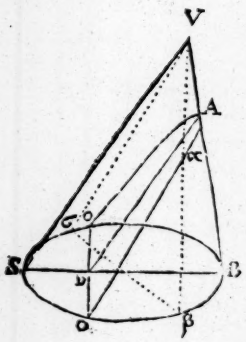
Quod autem *Planum Coni-sectionem efficiens, si unam ex parallelis Coni circulis secet secundum rectam O O, ipsius diametro B S perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos quos secat circulos secabit secundum rectas quæ ipsorum diametris ipsi B S parallelis sint perpendiculares*: Sic demonstrabitur. Cùm circuli supponantur paralleli, erunt & eorum sectiones O O, O O, (eodem plano factæ) parallelæ, (per 16 e 11.) quæ propterea cum parallelis circulorum diametris (B S, B S,) eosdem angulos faciunt, (per 10 e 11.) ponitur autem, angulos ad diametrorum parallelarum unam rectos esse; ergo & ad omnes; Quod erat demonstrandum.

Reliqua in Propositione vel Definitiones sunt, vel ex propositionis curriculo satis patent.

Monendum autem est *Parabolæ*, *Ellipsis*, & *Hyperbolæ* appellationibus, apud Geometras, (quâ igitur libertate & nos aliquando usuri sumus,) nonnunquam curvas *lineas* in superficie

conicâ factas, (quas in propositione definivimus,) nonnunquam verò *figuras planas* ejusmodi curvis terminatas, intelligi. Siquando autem de ambiguitate significationis metuatur, non incommodum erit *lineæ* vel *plani* vocem adjungere; ut *linea Parabolica*, *planum Parabolicum*, &c.

Monendum est etiam, sub *Ellipseos* nomine (quod tamen alii non solent) me etiam *Peripheriam Circuli* comprehendere, (vel etiam ipsum Circulum.) Circulus enim ab Ellipsi (figuram intellige lineâ Ellipticâ comprehensam) non aliter differt quam ut Quadratum a Parallelogrammo. Nam ut *Parallelogrammum* cujus latera sunt æqualia angulíq; recti. vel (si liber) cujus diametri conjugatæ sunt æquales & ad angulos rectos, (habent enim & figuræ rectilineæ suas diametros, quanquam non ut curvilineæ infinitas, suísq; diametris ordinatim-applicatas; & quidem Parallelogrammum diametrorum habet duo paria, nempe duas diagonales, & duas lateribus parallelas se mutuo bisecantes; tam illæ autem quam hæ sunt conjugatæ:) est *Quadratum*: Sic *Ellipsis*, cujus diametri conjugatæ sunt æquales & ad angulos rectos, *Circulus* est. Et quidem ea omnia quæ Ellipsibus universaliter conveniunt, conveniunt etiam circulis, (non minùs quàm quæ Parallelogrammis conveniunt, conveniunt Quadratis,) nisi quod Ellipseos appellatio non soleat illis attribui. Sicui nostra hæc phrasiologia non placeat, fruatur suo sensu; modò sciat, quid apud me Ellipseos nomine significetur; quod necessariò monendum erat, ne dicta nostra perperam intelligantur.



Monendum insuper est, Quod ea omnia quæ jam expositimus de uno Triangulo-per-axem, unde Conum formari supponimus, pariter intelligenda sunt de infinitis aliis Triangulis Conum per axem dividentibus. Potest enim super eorum quodvis ejusmodi formatio Coni supponi. Manentibus enim eisdem centris, distantiis, & planis, iidem formantur circuli, quamvis aliæ atq; aliæ sumantur Diametri, hoc est,

est, quamvis alio atq; alio triangulo Conus per axem dividatur. Verbi gratiâ, Triangulo V$\beta\sigma$ (per axem etiam transeunti) eadem conveniunt quæ ipsi V B S convenire diximus.

Non tamen hæc ita intelligenda sunt, acsi quocunq; Triangulo-per-axem accepto, eadem numerica Coni-sectio, methoda jam dictâ, formaretur: Sed saltem quocunq; Triangulo-per-axem accepto, puta V$\beta\sigma$, fieri potest ut illi accommodentur coni-sectiones eodem modo quo ipsi V B S. Quamvis enim verum sit, quòd Coni-sectionis O A O, aliquod punctum, ut α, sit in crure Vβ; attamen planorum O A O, O B O, communis sectio O O, non erit trianguli V$\beta\sigma$ basi $\beta\sigma$ perpendicularis (quod in Coni-sectionis genesi, in propositione traditâ supponitur;) supponitur enim perpendicularis esse alii ejusdem circuli Diametro B S, rectam $\beta\sigma$ secanti; non igitur & ipsi $\beta\sigma$ perpendicularis esse potest.

At interrogabit fortasse quispiam, Quid causæ sit, cur illud postuletur ut recta O O (circulo & Coni-sectioni communis) sit circuli diametro B S (in triangulo V B S existenti) perpendicularis? Annon enim, si planum secans ad triangulum-per-axem aliter inclinaretur, secaret superficiem Coni? Omnino. An verò ea sectio non una esset ex eis quas definivimus? Esset omnino. Cur igitur illa sola inclinatio plani-secantis ad triangulum-per-axem admittitur, quæ rectam O O rectæ B S, perpendicularem efficiat? Respondeo; Quod alia quævis inclinatio non minùs quidem sufficeret ad Coni-sectionem aliquam efficiendam; sed minùs apta esset ad Demonstrationes instituendas; cùm hæ plerumq; supponant rectam O O, eíq; parallelas, a circulorum diametris bisecari, quòd non fieret nisi diametris illis essent perpendiculares. Ideóq; cùm Planum Coni-sectionem efficiens ad varia triangula-per-axem variam inclinationem habeat, illud ex omnibus triangulum seligunt Conicorum scriptores ad cujus basin rectæ illæ O O sunt perpendiculares. Unum enim aliquod triangulum per-axem (& quidem unicum) illud patitur (nisi forsan coni-sectio proposita unus sit ex circulis basi parallelis) quomodocunq; Conus a plano secetur.

Quodnam autem ex omnibus illud sit, sic investigatur; si, verbi gratiâ, Conus V B O, plano secetur faciente Coni-sectionem

OAO, unum aliquem ex parallelis circulis OBO secante in OO: Ducatur in OBO circulo, diameter ipsi OO perpendicularis, quæ sit BS, & compleatur Triangulum VBS. Patet enim Planum Coni-sectionem efficiens, triangulo VBS ita insistere, (puta in AD, quæ propterea Coni-sectionis diameter erit,) ut circulum OBO secet secundum rectam OO ipsius Diametro BS (quæ & Trianguli VBS basis est) perpendicularem, quod erat faciendum. Triangulum igitur VBS illud est, secundum quod Conisectionis OAO natura & proprietates sunt perpendendæ (si autem non ipsa BS, sed alia aliqua, puta $\beta\sigma$, fuisset ipsi OO perpendicularis; tum non Triangulum VBS, sed V$\beta\sigma$, seligendum esset.)

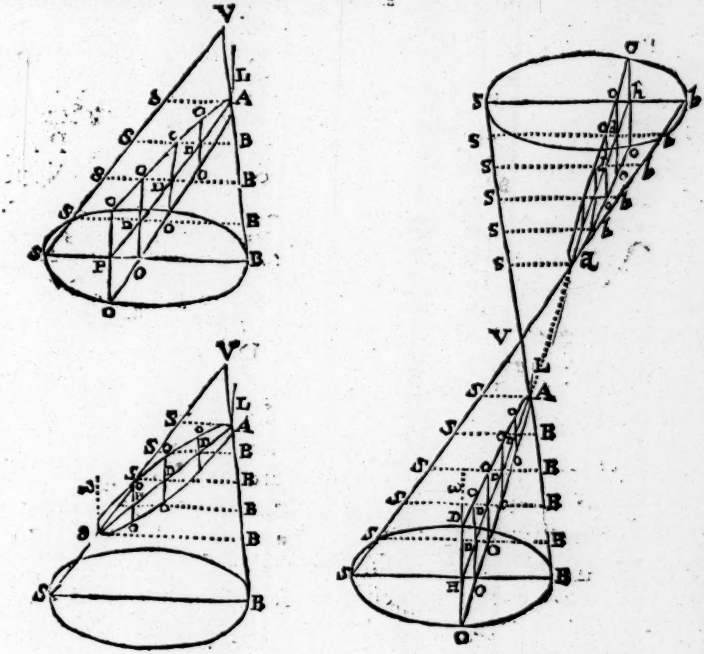
Et quamvis aliunde quidem verum sit (ut suo loco dicetur) alias Diametros (aliósq; propterea vertices) conisectioni OAO convenire; sola tamen AD ea est quæ dici solet *Diameter ex generatione*; intellige, prout jam huic Cono applicatur: Nam revera eadem Coni-sectio potest vel alii forsan Cono, vel etiam huic in alio situ, ita accommodari, ut alias habeat Diametros ex generatione.

Atq; hæc quidem ad pleniorem propositionis intelligentiam monenda duxi.

Sed & ulterius monendum est; quod, *quum diximus Punctum A in utrovis Trianguli crure, puta VB, ubivis assignari posse; Vel excipiendum erit punctum Verticis V*; *vel, pro Coni-sectione exspectata, prodibit aliquid simplicius*; eò nempe quod una saltem quantitatum ex quibus Coni-sectio dependet, evanescet in nihilum seu non-quantum. Nam, verbi gratia, si punctum A assignetur in cruris VB puncto V, & velim Parabolam describere; recta AP (quæ ducenda erat parallela) cum ipsa VS coincidet; adeoq; rectæ SD evanescent, & propterea evanescent ordinatim-applicatæ DO, (nam si altera multiplicantium sit o ciphra, erit & quantitas producta o ciphra:) adeóq; Parabola prodiret nullius latitudinis, hoc est, linea recta, terminata quidem ex parte A vel V, infinita verò ex parte P, vel O: (coincident enim puncta P, O, propter nullitatem ordinatim-applicatarum PO, vel DO.) Eodem modo, si describenda sit Ellipsis; Posito puncto A in V, (ubicunq; in crure VS supponatur a,) propter coincidentiam punctorum A, V, coincident etiam rectæ Aa, Va: ideóq;, evanescentibus rectis DS, evanescent etiam

DO;

D O; eritq; propterea Ellipsis nullius latitudinis, hoc est, linea recta, utrinq; quidem terminata; (saltem nisi & punctum a in cruris V S puncto V assignetur; quo casu, propter coincidentiam punctorum A, a, recta illa degenerabit in unicum punctum.) Pari modo, si describenda esset Hyperbola; posito, ut prius, puncto A in V, (ubicunq; assignetur H,) recta H A a erus utrumq; V B, V S, eodem puncto V, secabit; adeóq; transversa diameter A a (propter coincidentiam punctorum A, a, V, evanescet; adeóq; Hyperbola in Triangulum degenerabit, (ut ex Hyperbolæ doctrinâ postea tradenda colligi poterit; interim idem satis patet ex dictis Prop. 6.) Saltem nisi recta



A H eousq; recedat a crure V S, ut ipsi V B coincidat; quo casu, (sive A assignetur in vertice V, sive ubivis aliàs in crure V B,)

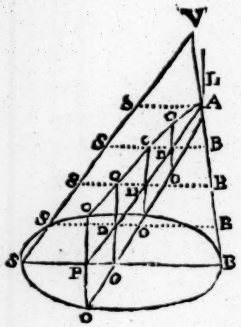
VB,) evaneſcent rectæ DB, adeóq; & DO; & pro Triangulo vel etiam Hyperbola OVO vel OAO, prodibit linea recta, ex unâ quidem parte terminata, ex reliqua vero infinita.

PROP. VIII.

De Parabolâ, Sectione Coni factâ.

IN Parabola, Quadrata Ordinatim-applicatarum ſunt interceptis- Diametris proportionalia.

Quadrata nempe ordinatim-applicatarum PO, DO, &c. ſunt rectis PB, DB, &c. (in triangulo APB parallelis) proportionalia, (adeoq; & *interceptis Diametris*, hoc eſt, diametrorum ſegmentis inter ipſas ordinatim-applicatas & verticem interceptis, PA, DA, &c.) æqualia quippe rectangulis BPS, BDS, &c. quæ propter æquales PS, DS, &c. (in parallelogrammo APS) ſunt æque alta, & propterea baſibus (PB, DB, &c.) proportionalia.



Adeoq; ipſæ ordinatim-applicatæ ſunt in ſubduplicata ratione Diametrorum interceptarum; nempe in ſubduplicata ratione ſuorum quadratorum.

Si igitur ordinatim-applicatæ quotlibet æqualibus ab invicem diſtantiis ſumantur; erunt earum quadrata in continua progreſſione Arithmetica, (ut patet ex dictis ad Prop. 2.)

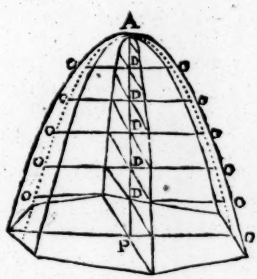
Conſtabit igitur (per Prop. 1.) ſemiparabolæ planum (adeoq; & totius Parabolæ) ex infinitis lateribus quadratorum Arithmetice proportionalium.

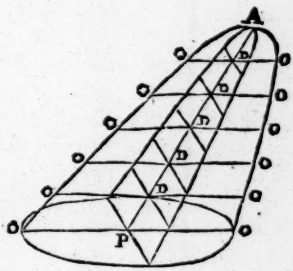
PROP.

PROP. IX.

De Conoide, & Pyramidoide Parabolico.

HInc *ſequitur*; Si ex omnium in Parabola ordinatim-applicatarũ quadratis, ad communem axem ordinatim poſitis, formetur *Pyramidoides Parabolicum* (eo mdo quo Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem & Conum) erit illud infinitorum planorum Arihmetice proportionalium aggregatum, (ſicut Triangulum rectarum,) ab o incipiendo & continue progrediendo ad baſin uſque.





Cælatoris incuriâ error admiſſus eſt; nam pyramidoidis baſis ſupponitur ſexangula (novi ſeptangula) & recta OPO baſis eſſet Parabolæ punctuatæ.

Adeoq; ſi Baſis figuræ ſic conſtructę in ſemiſſem Altitudinis ducatur, prodibit totius figurę ſoliditas: (eodem argumento quo uſi ſumus de triangulo Prop. 3.)

Cumq; idem (eodem argumento) valeat de circulis, aliiſve figuris planis ſimilibus quibuſcunque, (ſunt enim ad invicem, ut diametrorum, vel rectarum quarumlibet ſimiliter ductarum, quadrata;) erit univerſaliter *Conoides vel Pyramidoides Parabolicum*, quacunq; baſe, (ſive etiam erectum ſit, ſive ſcalenum, ſive etiam quocunq; modo luxatum, per ea quę dicta ſunt Pr. 4.)

æquali

æquale baſi in ſemiſſem altitudinis ductæ; hoc eſt, *Semiſſis Priſmatis* (ut parallelogrammi Triangulum,) *ſuper eadem baſi æque-alti.*

Eſt enim (ex dictis) *Pyramidoides Parabolicum* (ſub quo & Conoides comprehendo) Aggregatum planorum ſimilium numero infinitorum Arithmetice proportionalium (ab o continue progrediendo,) circa eundem axem rectilineum ordinatim-poſitorum; quorum quidem ſingulorum craſſities ſupponitur æqualis ∞ altitudinis totius figuræ ſolidę.

Quæ ſupra Prop. 5, 6. De Pyramide & Cono, eorúmq; altitudinibus, axibus, planiſq; ordinatim-applicatis; item de Pyramidibus Coniſq; rectis, ſcalenis, luxatis, &c. dicta ſunt; eadem ferè Pyramidoidibus & Conoidibus accommodanda ſunt.

Ego verò hanc Conoidis, (adeóq; & Pyramidoidis) Parabolici formationem potius adhibeo, quàm quæ a veteribus aliiſq; adhiberi ſolita eſt, (nempe, circumductâ Semi-parabolâ rectâ, manente Axe;) quoniam ea formatio non omnibus Conoidibus (ſed ſolummodo rectis) nec Pyramidoidibus omnino convenit. Atq; hoc eâdem ratione facio, qua Apollonius Euclidéam Coni formationem, (circumducto nempe Triangulo rectangulo, manente laterum circa angulum rectum alterutro,) in aliam commutavit (circumductâ nempe per circuli peripheriam lineâ rectâ, manente ipſius uno aliquo puncto extra circuli planum exiſtente:) quia ſcilicet Euclidéa iſta ſolis Conis rectis conveniebat, hæc autem quibusvis ſive rectis ſive ſcalenis. Non igitur mirari debet quiſpiam, ſi prout ille Euclidéam Coni, ſic ego Archimedéam Conoideos, formationem ſpecialem, in aliam magis univerſalem, commutavero: quæ etiam & Pyramidoidibus aliis (de quibus nulla hactenus, quantum ſcio, conſideratio habita fuit) pariter conveniat.

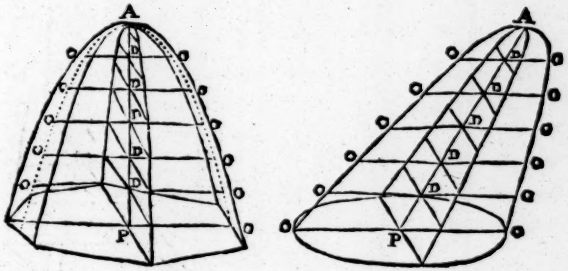
Quæ autem, de Conoidibus & Pyramidoidibus Parabolicis formandis, jam diximus; eadem de Ellipticis & Hyperbolicis deinceps intelligenda erunt.

PROP.

PROP. X.

De Conoideos & Pyramidoideos Parabolici sectione.

SI Pyramidoides (vel Conoides) Parabolicum plano per axem secetur; cum manifestum sit ipsius infinita plana similia similiter secari, & quidem per centra; erunt ea similiter bisecta; atque communes eorum cum plano secante sectiones erunt propterea in figurarum suarum, (quæ quidem Arithmetice proportionales sunt) adeoq; & distantiarum a



vertice, subduplicata ratione, &, propterea, ut ordinatim applicatæ in Parabolâ. *Communis igitur sectio (Pyramidoidis Parabolici, planique per axem secantis,) est Parabola.*

De aliis verò Conoideos Parabolici sectionibus (non per axem) non libet hic speciatim differere: *Sunt autem illæ omnes* (vel circuli, vel) *Ellipses.*

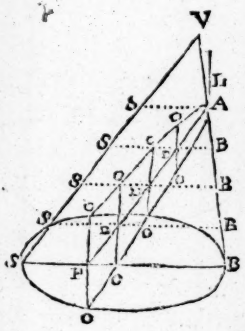
Nota tamen, ut ejusdem Parabolæ infinitæ sunt Diametri, (ut suo loco dicetur;) ita & *Conoideos Parabolici infinitos esse* (sive *Diametros* dicas, sive) *Axes; qui quidem omnes* (ut Parabolarum Diametri) *sunt invicem paralleli: Qui omnes sua plana habent Ordinatim applicata.*

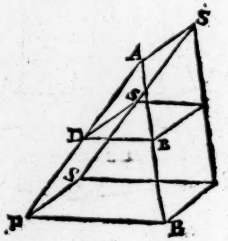
Verùm hæc monuiſſe ſufficiat, cùm nonſit hujus loci ea fuſius proſequi.

PROP. XI.

De Cuneo Parabolico.

SEd & libet hoc ſubjungere de Pyramidoide Parabolico. Quoniam (in Cono) Rectangula BDS æqualia ſunt Quadratis DO; ſi omnes rectæ BD ducantur in omnes DS, (hoc eſt, ſi ſuper Triangulo APB, erigatur Priſma cujus altitudo ſit





AS, vel DS,) fient infinita Parallelogramma BDS æqualia totidem Quadratis DO: Hoc eſt, Pyramidoides Parabolicum (cujus baſis ſit Quadratum PO) æquatur Cuneo ſeu Priſmati APBS, (quem *Cuneum Parabolicum* libet appellare.) Omnia enim BDS rectangula in Cuneo (ipſi BPS parallela) ſunt ipſa rectangula BDS in Cono deſignata. Ideóq; & totum toti æquatur, & quidem ſegmenta illius analogis ſegmentis hujus.

Intelligendum

Intelligendum autem eſt, Altitudinem Cunei (perpendiculari ab acie A S ad oppoſitam baſin B P S demiſſa æſtimandam) eandem eſſe debere atq; Altitudinem Conoideos.

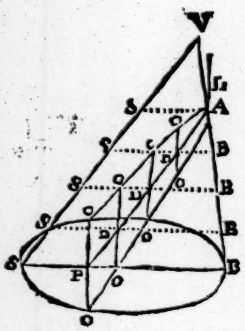
PROP. XII.

De Parabolæ Latere-Recto.

MAnifeſtum eſt, (per ea quæ dicta ſunt,) datis rectis D B, D S, hoc eſt, D B, A S; dari etiam D O (ordinatim applicatam ad diametri punctum D) ut quæ eſt inter illas media proportionalis: At non contra; Nam & manifeſtum eſt, menſuras illas prorſus extraneas eſſe (extra Parabolæ planum conſtitutas) & omnino accidentarias, (non minùs quàm, in Multiplicatione, numeri Factores ad numerum Factum, qui ab aliis etiam Factoribus, infinitis modis variatis, produci poſſit:) Poſſunt enim binæ rectæ D B, B S, infinitis modis variari, iiſdem interim manentibus tam Diametro Parabolæ quàm ad illam ordinatim applicatis; (ſi nempe quâ ratione augetur vel diminuitur P S vel A S, latus Parallelogrammi A P S, eâdem è contra minuatur vel augeatur P B latus trianguli A P B) Quod quidem eouſq; verum eſt, ut quælibet parabola cuilibet Cono accommodari poſſit: (quod mox, ex abundanti, demonſtrabimus.)

Ne igitur nulla ſit determinata menſura, lineis ad ipſam Parabolam peculiariter pertinentibus exprimenda, quâ ordinatim applicatarum magnitudo explicetur: Loco rectarum D B, D S, hoc eſt D B, A S, (quarum hæc invariata manet, illa perpetuò variatur, prout propiùs aut remotiùs abeſt a Parabolæ vertice) duas alias jam olim ſubſtituerunt Coni-ſectionum contemplatores; Quarum altera eſt *Diameter*

intercepta, A D, quæ intra Parabolam reperitur, eſtq; ſemper rectæ D B (cujus vices ſupplet) proportionalis, (utraq; nempe eâdem ratione ſimul & creſcunt & decreſcunt pro vario ſitu *puncti-applicationis* D.) Reliqua verò, quod *Latus rectum* vocatur, (vel recta diameter, vel recta juxta quam poſſunt ordinatim-applicatæ, vel etiam, apud Midorgium, Parameter,) non uſpiam vel in Coni-ſectione, vel in ipſo Cono, realiter exiſtit; ſed ſolâ imaginatione ſupplet ur, ut vices ſubeat rectæ D S, vel A S: Ideoq; quantuplo major eſt vel minor A D quam D B, tantuplo è contra minus vel majus ſupponitur Latus rectum, (puta L A,) quam D S vel A S: Adeóq; tribus D B, D S, D A, vel D B, A S, D A, erit quarta reciprocè-proportionalis L A; ut æqualia ſint rectangula D A × A L, ipſis D B × D S, vel D B × A S, hoc eſt, quadratis D O. Vel, (ſubſtitutis idoneis ſymbolis, puta b=D B, s=A S, d=A D, l=L A, & p=DO,) erit ubiq; Quadratum ordinatim-applicatæ in Parabolâ $p^2 = (bs =) dl$.



Eſtq; hoc quidem eſſentiale Parabolæ ſymptoma, unde reliqua omnia dependent, & calculo deduci poſſunt. Ut autem ſectione Coni fiat, omnino accidentarium eſt. Ideóq;, genuino ſymptomate ſic reperto, Conum dimittere licet; ideóq; ulteriorem in ipſius affectiones diſquiſitionem differemus donec ad abſolutam Parabolæ tractationem (ſine reſpectu ad Conum habito) perveniamus, (quam Prop. 21. & ſequentibus aggrediemur:) Interim ſimilia Ellipſeos & Hyperbolæ genuina ſymptomata

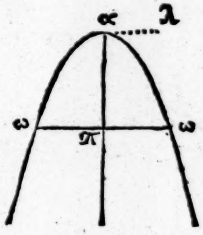
tomata inquiremus, ut omnium tandem absolutam naturam seorsim perpendamus.

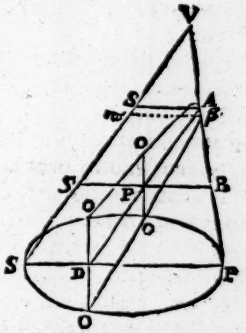
Monendum tamen est de Latere Recto; non idem Latus Rectum omnibus ejusdem Parabolæ Diametris convenire; (Quod etiam de Ellipseos & Hyperbolæ Latere Recto postea intelligendum erit:) Sed (ut habet quælibet Parabola infinitas Diametros, ut post dicetur, ita) quælibet Diameter suas habet ordinatim-applicatas, suúmq; Latus Rectũ: Quæ quidem linea imaginaria, certæ tamen longitudinis, (quamvis vel ubivis aliàs scribi possit, vel etiam non scribi, sed solâ imaginatione suppleri) duci solet a Diametri Vertice ordinatim-applicatis parallela.

Quæ autem de Parabolæ Latere-recto dicta sunt, ea fere Lateribus-rectis Ellipseos & Hyperbolæ deinceps accommodanda erunt.

Quod autem supra polliciti sumus, ex abundanti, demonstrare; nempe, *Quamlibet Parabolam cuilibet Cono aptari posse*; sic ostenditur.

Sit proposita Parabola (cujuscunq; Coni) $\alpha\omega$, cujus axis $\alpha\pi$, ejusq; puncto cuilibet π ordinatim-applicata $\pi\omega$. (Quòd autem quælibet Parabola Axem habeat, & quomodo in datâ Parabola reperiatur, post ostendetur: interim illud licebit, sine violata methodo, quasi concessum assumere, cùm tota hæc De-





monstratio sit ex abundanti:) Dico Parabolam illam cuilibet Cono, puta V B S, aptari posse.

Secetur enim per axem Conus propositus plano ad basin recto; sitq; Triangulum illa sectione factum V B D S. In hujus alterutro crure, puta V S, sumatur avertice V π æqualis ipsi $\alpha\pi$ diametro Parabolæ propositæ; & intelligatur recta duci $\pi\beta$ parallela basi B S. Tum rectis $\pi\beta$, $\pi\omega$, quæratur tertia proportionalis, cui æqualis sumatur (in base Trianguli) recta S D; &, per punctum D, ducatur recta D A, lateri V S parallela, reliquoq; cruri V B occurrens in A. Dico rectam A D diametrum esse Parabolæ in Cono cui Parabola proposita congruet, quod sic ostendo.

Super Triangulo V B D S, rectâq; in illo A D, (quæ est, ex constructione, cruri V S parallela,) ad angulos rectos erigatur Planum, D A O. Cùm autem tam planum sic erectum, quam Basis Coni B O S D (ex constructione,) sint triangulo V B S recta; erit eorum communis sectio D O, eidem Triangulo recta sive perpendicularis (per 19 e 11,) adeoq; tam rectæ A D quàm (diametro basis Coni) B S perpendicularis (per 3 d 11;) ideóq; (per 7 hujus) A O, sectio in superficie Coni Plano sic erecto facta, erit Parabola, ejusq; Axis A D.

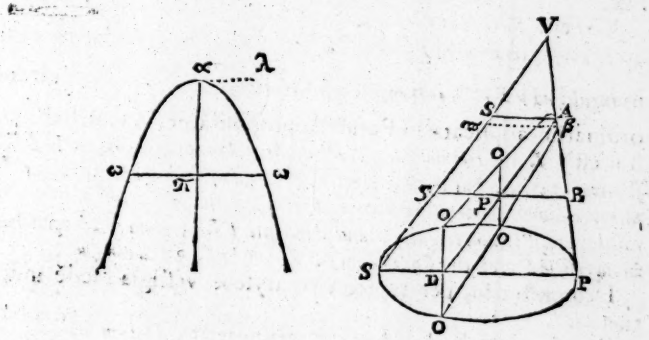
Tum in Axi A D sumatur recta A P, rectæ V π, (hoc est $\alpha\pi$,) æqualis: ductaq; S P B, rectæ S D B parallela; erit (propter similia triangula) P B æqualis rectæ $\pi\beta$: sed & S P (propter parallelas) æqualis rectæ S D: Ideoq; ordinatim-applicata P O (media proportionalis inter S P, P B, hoc est, inter S D, $\pi\beta$) æqualis est rectæ $\pi\omega$ (quæ ipsis S D, $\pi\beta$, media proportionalis est, ex constructione.)

Cùm igitur tam A P, $\alpha\pi$, quam P O, $\pi\omega$, sint æquales rectæ; atq; angulus comprehensus A P O, angulo comprehenso $\alpha\pi\omega$, æqualis (quoniam uterq; rectus;) puncta α, π, ω punctis A, P, O, applicata congruent; (rectæq; A P, P O, rectis $\alpha\pi$, $\pi\omega$, Atq; idem eodem modo probari potest de reliquis punctis. Tota igitur $\alpha\omega$ toti parabolæ A O congruit. quod fieri posse probandum erat. Adeoq; Datam Parabolam dato Cono aptavimus: quod erat faciendum.

Idem Analytice sic poterit investigari. Propositum sit datam Parabolam $\alpha\omega$ (cujus Axis $\alpha\pi$, ordinatim-applicata $\pi\omega$,) dato Cono V B O S adaptare. Et supponamus præstitum esse quod imperatur, sitq; ea parabola Cono aptata A O, cujus Axis A P = $\alpha\pi$, eiq; ordinatim-applicata P O = $\pi\omega$. Adeóq; recta P O

Perpendicularis

perpendicularis tam rectæ BPS basi Trianguli-per-Axem, aut ei parallelæ, (propter Coni-sectionem,) quàm rectæ AP (propter Axem;) ideóq; recta PO plano APB (quod trianguli planum est) recta, (per 4 e 11.) & propterea tam planum circuli BOP, quam Parabolæ AOP, (quorum communis sectio est PO) eidem Trianguli plano rectum erit, (per 18 e 11.) Atq; hinc quidem constat, Triangulum-per-axem-Coni in quo quærendus est Axis Parabolæ, illud esse, quod Coni basi



rectum est; Atq; insuper, Planum-secans quod Parabolam efficit (adeoq; & Parabolæ planum) isti Triangulo rectum fore. Quæ est prima pars inquisitionis.

Deinde (reperto jam quodnam sit Triangulum per Axem Coni in quo quærendus est Axis quæsitæ Parabolæ; & quam inclinationem habiturum est planum secans ad illud Triangulum: ut situs Axis Parabolæ in illo Triangulo reperiatur, sic progrediendum;) supposito, ut priùs, rem factam esse quæ imperatur; & Parabolæ Axem AP in Triangulo-per-Axem VBS jacere: Erit AP (propter parabolam) alterutri Crurum, puta VS, parallela. Ideoq; (si per puncta A, P, duci intelligantur in triangulo per Axem rectæ AS, BPS, basi parallelæ) proportionales erunt (propter similia triangula) VB BS :: VA. AS = PS = $\frac{BS \times VA}{VB}$. Item VS. SB :: AP. PB = $\frac{BS \times AP}{VS}$. Item (propter Coni-sectionem) SP. PO, PB ÷ , hoc est

BS

$\frac{BS \times VA}{VB}$. PO. $\frac{BS \times AP}{VS}$ :: continuè proportionales. Ergo $PO q = \frac{VA \times AP}{VB \times VS} \times BSq$. hoc est, $\pi\omega q = \frac{BSq}{VB \times VS} \times VA \times a\pi$. & $\frac{VB \times VS \times \pi\omega q}{Bsq \times a\pi} = VA$. Ideoq; proportionales BSq. VB×VS :: $\frac{\pi\omega q}{a\pi}$. VA. Habetur ergo recta VA, adeoq; Parabolæ vertex A, in crure VB, unde ducta AP cruri VS parallela, est diameter Parabolæ quæsitæ.

Hoc est. *Si Conus Propositus secetur plano per Axem, quod Basi Coni rectum sit, triangulum faciente VBS: & fiat, ut BSq quadratum basis trianguli, ad VB×VS rectangulum sub-cruribus; sic* $\frac{\pi\omega q}{\pi a}$ (quadratum ordinatim-applicatæ in Parabolâ propositâ, per Axem divisum, hoc est) *Latus rectum Parabolæ propositæ Axi conveniens; ad VA distantiam verticis Parabolæ a vertice Trianguli, in utrovis ipsius crure mensurandam; Et deniq; a vertice A recta ducatur AP opposito cruri parallela; eiq; Planum erigatur plano trianguli VBS rectum: Planum hoc in superficie Coni faciet Parabolam, cui Parabola Proposita congruet.*

Demonstratio, per repetita Analyseos vestigia facilè instituetur.

Pari fere methodo demonstrari poterit, *Datam Ellipsin vel Hyperbolam* (de quibus postea dicendum erit) *non quidem Cono cuilibet, sed saltem Conis quotlibet specie differentibus, aptari posse.* Cujus Propositionis & Demonstrationem & Determinationem lubens prætereo, partim ne tædio sim, nec velim tyronibus ingenium suum exercendi causam præripere, partim etiam quoniam illud instituto nostro non est necessarium.

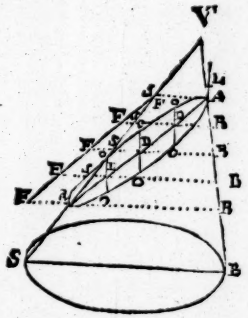
PROP. XIII.

De Ellipsi, sectione Coni factâ.

IN elipsi, Quadrata ordinatim-applicatarum æqualia sunt differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem illa (majora) sunt interceptis-

Diametris

Diametris proportionalia; hæc vero (minora) in earundem ratione duplicata.



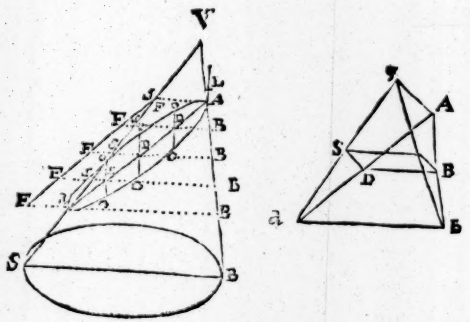
Sunt enim Quadrata DO æqualia Rectangulis BD×DS, (per prop. 7.) Ducta vero recta SFF, ipsi AE parallela, & continuatis rectis EDS ad F; erunt ubiq; rectæ DS=DF−FS. Et Rectangula ED×DS=BD×DF−ED×FS. Sunt autem (propter æquales rectas DF) Rectangula BD×DF, rectis ED proportionalia, ideóq; & rectis DA diametris interceptis (propter similia triangula ADB.) Rectangula verò ED×FS (quoniam tam BD quàm FS rectæ sunt rectis DA proportionales) sunt in duplicatâ ratione diametrorum interceptarum DA. Cum igitur sit ubiq; DOq= (ED×DS=) ED×DF−ED×FS; constat propositum.

PROP. XIV.

De Elliptico Pyramidoide, & Conoide, (seu Sphæroide) & Cuneo.

SI (ut Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem vel Conum, & Prop. 9. Pyramidoides Parabolicum,) ex omnibus quadratis DO ordinatim-aplicatarum in ellipsi, formetur *Pyramidoides ellipticum* bicuspe (hoc est, Pyramidoides geminum super communi base,

vertices habens oppositos,) æquabitur illud cuneo cuidam bicuneato (nempe binas oppositas acies habenti, sed situ subcontrario & quasi decussato) hoc est, corpori solido super basi triangulari aBA erecto, altitudinem



habenti super puncto A æqualem rectæ AS, sed æquabiliter decrescentem donec super recta aB tandem evanescat & nulla sit. Et quidem segmenta illius, Analogis segmentis hujus. Adeoq; & notæ mensuræ.

Manifestum enim est, quod, si Cuneus ille bicuneatus (quem *Cuneum Ellipticum* libet appellare) plano ad planum trianguli aBA recto (sicut & AS supponitur ad idem planum recta esse seu perpendicularis) ubivis secetur secundum rectam DB quæ sit aB rectæ parallela, sectio illa præstabit rectangulum BDS, cujus duo latera erunt rectæ aB parallela, reliquaq; duo rectæ AS, totumq; rectangulum EDS in Cuneo, Analogo rectangulo BDS in Cono designato, æquale erit: Adeoq; rectangula omnia BDS in cuneo, æqualia erunt rectangulis omnibus BDS in Cono designatis, hoc est, omnibus quadratis DO; hoc est, totus Cuneus toti *Pyramidoidi* bicuspidi æqualis erit, & quidem segmenta hujus analogis segmentis illius. Quod erat ostendendum, Ita tamen ut eadem retineatur altitudo Pyramidoidis

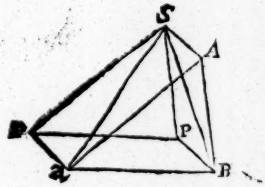
doidis, & Cunei, ut quadrata unius & Rectangula alterius æquè crassa intelligantur.

Cuneus autem ille bicuneatus, (quem Ellipticum diximus) est Pyramis super basi aBA, altitudinem habens AS, adeóq; notæ mensuræ.

Quod autem de Pyramidoide Elliptico ex omnibus Quadratis DO, dictum est; perinde valeret, si pro quadratis DO, substituerentur quadrata OO (ordinatim inscriptarum;) nisi quod Pyramidoides hoc esset illius quadruplum.

Cognitâ verò mensurâ Pyramidoidis Elliptici super basi quadrata, adeóq; & ratione quam habet ad Parallelepipedum super eadem basi æquè-altum: cognoscetur etiam ratio Conoideos Elliptici (vel, ut dici solet, Sphæroideos) ad Cylindrum super eadem basi æquè-altum; vel etiam Pyramidoideos super quacunq; basi plana (puta triangulari, quinquangulari, &c. vel etiam curvilinea, aut mista,) ad Prisma super eadem basi æque-altum: (si nempe pro omnibus quadratis substituantur totidem circuli, triangula, aliæve similes figuræ.) Per *Basin* autem hic intelligo medium illud planum quod duobus illis sive Pyramidoidibus sive Conoidibus est basis communis.

Est autem *Ellipticus* ille (quem dicimus) cuneus, cunei Parabolici segmentum. Si enim cuneus Parabolicus AP, secetur Plano aSB; erit aSBA cuneus Ellipticus sive Pyramis super triangulari basi aBA; reliquum verò segmentum aBSPP est Pyramis super basi quadrilatera aBPP; utriusq; verò pyramidis cuspis communis S. Si igitur ex Prismate (cuneo nempe Parabolico) AP, auferatur Pyramis aBSPP, restabit Cuneus Ellipticus (vel Pyramis) aSBA; cui æquale est Pyramidoides Ellipticum.



Sed & idem immediate colligi potest ex propositionis præcedentis calculo. Cùm enim omnia rectangula BD×DS, hoc est, omnia quadrata DO, æquantur omnibus rectangulis ED×DF, demptis omnibus BD×FS, patet propositum. Omnia enim rectangula BD×DF constituunt cuneum Parabolicum, (per

prop. 11.) Omnia vero BD×FS, Pyramidem; (per prop. 6.) Eorum igitur differentia æquatur vel Cuneo Elliptico, vel etiam Elliptico Pyramidoidi.

PROP. XV.

De Conoideos & Pyramidoideos Elliptici Sectione.

SI Pyramidoides vel Conoides Ellipticum plano per Axem (vel, si mavis, Diametrum) secetur; sectio erit (vel circulus, vel saltem) Ellipsis.

Probatio ejusmodi instituenda est, qualis prop. 6, & 10. ubi Sectio Pyramidis per axem ostenditur esse Triangulum; & Pyramidoidis Parabolici, Parabolam,

Alias vero sectiones non per Axem, non libet hic speciatim attingere. Moneo tamen *Conoideos Elliptici* (hoc est, Sphæroideos) *Axes* (nisi Diametros malis appellare) *infinitos esse in communi centro* (ut Ellipsium Diametri) *coeuntes*; *qui omnes sua plana habent ordinatim-applicata*. Nota etiam *Conoideos Elliptici* (vel Sphæroideos) *Sectiones omnes plano factas* (sive per axem, adeóq. & centrum, transeunte, sive non,) *esse* (vel circulos, vel saltem) *Ellipses*.

His autem diutius insistere non est hujus loci. Sufficit monuisse.

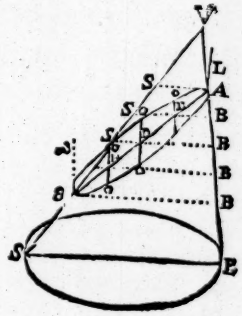
PROP. XVI.

De Ellipsis Latere-Recto.

CUM manifestum sit ex dictis, Quadrata DO, (Rectangulis BD×DS æqualia,) ex cognitis rectis BD, DS, cognosci posse; non autem, e contra, ex cognitis DO, cognosci rectas BD, DS; (possunt enim rectangula BD×DS infinitis modis variari, dummodo eadē maneat ordinatim-applicatarum quantitas, adeoq; eadem Ellipsis in conis dissimillimis reperi-

ri:

ri:ut patere poterit ex eis quæ ſupra de parabola dicta ſunt ad Prop. 12.) Placuit igitur Conicorum ſcriptori-



bus (ut in Parabola, ſic) in Ellipſi aliis menſuris ordinatim-applicatarum quantitatem determinare, quæ eandem Ellipſin ubiq; comitentur.

Nempe pro ſingulis rectis BD, ſubſtituunt ſingulas AD, diametros interceptas; quę quidem illis ſunt proportionales.

Pro recta vero AS, ſubſtituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus Rectum* appellant) quę tribus AS, BD, DA, ſit quarta reciproce proportionalis; ut ſit ubique BD×AS=DA×LA. Adeóq; Latus-rectũ $LA=\frac{DB}{DA}\times AS$, & $AS=\frac{DA}{DB}\times LA$.

Tum (continuata Diametro AD donec oppoſito Trianguli-per-axem cruri occurrat in a, ut habeatur Diameter-tranſverſa Aa;) erit (propter ſimilia triangula) Aa.AS::Da.DS=$\frac{Da}{Aa}\times AS$. Ideoque BD×DS (=DOq)=$\frac{Da}{Aa}\times AS\times BD=\frac{Da}{Aa}\times LA\times DA$. (quia nempe BD×AS=DA×LA, ut dictum eſt.)

Hoc eſt (ſubſtitutis idoneis ſymbolis, nempe $t =$ Aa, $d =$ DA, $t-d =$ Da, $l =$ LA, & $e =$ DO) Quadratum ordinatim-applicatæ in Ellipſi $e^2 = \frac{t-d}{t} ld = \frac{td-d^2}{t} l = dl - \frac{d}{t} dl = ld - \frac{l}{t} d^2$. (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem (repetita figura prop. 13.) tam ſeparatim $ld =$ FD×BD, & $\frac{l}{t} d^2 =$ FS×DB, quã conjunctim $-ld\frac{l}{t}d^2 =$ FD×DB − FS×DB = SD×DB = DOq.

Demonſtratione non opus eſt aliâ quam quæ propoſitionis curriculo paſſim interſeritur.

Eſtq; hoc quidem eſſentiale Ellipſeos Symptoma; unde reliqua dependent & calculo deduci poſſunt. Ut jam non opus ſit reliquarum affectionum in ipſo Cono inveſtigatio; ſed melius & clarius deinceps in abſolutâ Ellipſis conſideratione (ſine ullo ad Conum reſpectu habito) inſtituetur: quam prop. 26. aggrediemur.

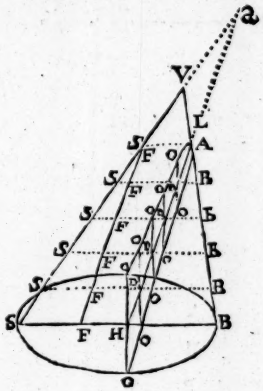
PROP. XVII.

De Hyperbola, Sectione Coni facta.

IN Hyperbola; Quadrata Ordinatim-applicatarum, æqualia ſunt aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera ſunt interceptis-Diametris proportionalia, altera vero in earundem ratione duplicatâ.

Sunt enim Quadrata DO, æqualia Rectangulis BD×DS (per Prop. 7.) Ducta vero recta SF F ipſi AH parallela, (quæ Trapezium SSHA in Parallelogrammum SFHA & Triangulum SFS, dirimat) erunt ubiq; rectæ DS = DF+FS, & Rectangula BD×DS = BD×DF+BD×FS. Sunt autem (propter æquales DF) Rectangula BD×DF, rectis BD proportionalia, ideoq; & rectis DA Diametris-interceptis

tis. Rectangula vero BD×FS (quoniam tam BD quàm FS rectæ ſunt rectis DA proportionales) in duplicata ratione



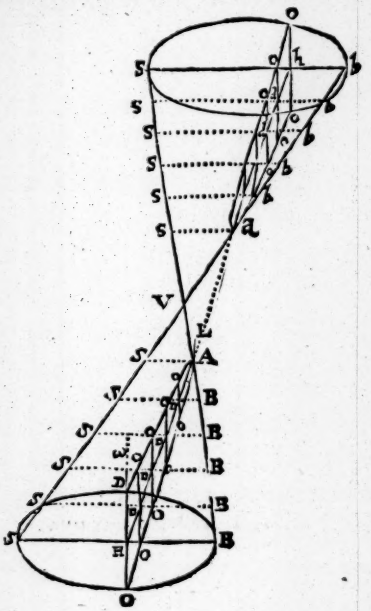
rectarum DA diametrorum interceptarum. Cùm igitur ſit ubiq; DOq= (BD×DS=) BD×DF+BD×FS; conſtat propoſitum.

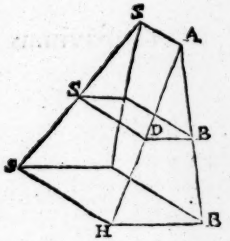
PROP. XVIII.

De Hyperbolico Pyramidoide, Conoide, & Cuneo.

SI (ut Prop. 9. & 14. formavimus Pyramidoides Parabolicum & Ellipticum) ex omnibus Quadratis DO ordinatim applicatarum in Hyperbola, formetur *Pyramidoides Hyperbolicum*; æquabitur illud Cuneo cuidam, quem *Cuneum Hyperbolicum* libet appellare; nempe ſolido ſuper baſi triangulari AHB erecto, altitudinem habenti ſuper puncto A æqualem rectæ AS, ſed continue creſcentem æquabiliter donec ſuper rectâ HB æqualis evadat rectæ HS. Et quidem ſegmenta illius Pyramidoidis, ſegmentis

mentis cujus Cunei analogis erunt æqualia. Adeoq; tam Pyramidoides totũ quam illius ſegmenta notæ erunt mẽſuræ.

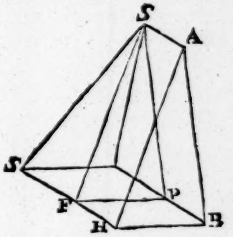




Si enim Cuneus ille Hyperbolicus plano ubivis ſecetur, quod plano Trianguli AHB rectum ſit, (ſicut & AS ſupponitur eidem triangulo rectam eſſe,) & plano HBS parallelum: Rectangula ſingula hujuſmodi ſectione facta, puta BDS, æqualia erunt ſingulis BDS in cono deſignatis, hoc eſt, ſingulis quadratis DO: adeóq; aggregatum eorum aggregato horum; hoc eſt, totum Pyramidoides toti Cuneo; atq; (eâdem ratione) ſegmenta illius analogis ſegmentis hujus. Modo interim curetur ut eadem retineatur Pyramidoidis & Cunei Altitudo; ut Quadrata unius & Rectangula

la alterius æqualem ſupponantur craſſitiem habere.

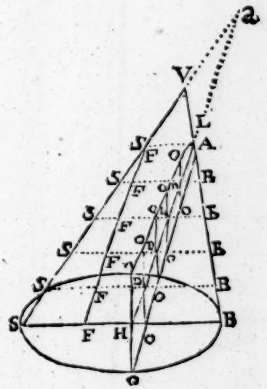
Cuneus autem ille Hyperbolicus, eſt fruſtum Priſmatis (plano abſciſſum) ſuper baſi AHB erecti; altitudinem habens ſuper puncto A æqualem rectæ AS, ſuper punctis autem H, B, æqualem rectæ HS. Adeóq; notæ menſuræ.



Eſt autem hic Cuneus, Aggregatum Cunei Parabolici HBASPF, & Pyramidis SPFS. quod patebit ſi ſecari intelligatur plano SFP parallelo triangulo AHB.

Quod ipſum etiam concludi poteſt ex calculo. Cum enim ſingula quadrata DO, vel rectangula BDS in Cono, æquentur ſingulis aggregatis BD×DF+BD×FS; manifeſtum eſt omnia BD×DF (per Prop. 11.) æquari Cuneo Parabolico, atq; omnia BD×FS (per Prop. 6.) Pyramidi.

Cuneus autem ille, ſive conſideretur ut fruſtum Priſmatis, ſive ut aggregatum Pyramidis & Priſmatis (Cuneive Parabolici,) erit notæ menſuræ; Adeóq; & Pyramidoides Hyperbolicum (huic æquale) erit notæ menſuræ.



Quod autem de Pyramidoide ex quadratis DO dictum eſt, pariter etiam conveniret Pyramidoidi ex quadratis OO (ordinatim inſcriptarum) niſi quod hoc eſſet illius quadruplum.

Item (quoniam ſimiles figuræ planæ ſunt ad invicem ſicut homologorum laterum, vel etiam rectarum quarumlibet ſimiliter inſcriptarum, quadrata;) Cùm cognoſcatur menſura Pyramidoidis Hyperbolici ſuper baſi quadratâ, adeóq; & ratio ipſius ad Parallelepipedum ſuper eâdem vel æquali baſi æquè altum,

tum; cognoſcetur etiam ratio cujuſlibet alius Pyramidoideos vel Conoideos Hyperbolici ſuper quacunq; baſi plana ad Priſma vel Cylindrum ſuper eâdem vel æquali baſi æquè-altum. Si nempe pro ſingulis quadratis ſubſtituantur vel Circuli vel Triangula, vel quævis aliæ figuræ planæ ſimiles.

PROP. XIX.

De Conoideos & Pyramidoideos Hyperbolici Sectione.

SI Pyramidoides vel Conoides Hyperbolicum plano per Axem (vel, ſi mavis, Diametrum) ſecetur; Sectio erit Hyperbola.

Probatur eodem argumento quo uſi ſumus de Pyramide & Cono prop 6. atq; de Pyramidoidibus & Conoidibus Parabolico & Elliptico, prop. 10 & 15.

Habet autem Conoides Hyperbolicum Axes (niſi Diametros malis appellare) *infinitos, communi centro* (ſed extra Conoides) *coeuntes; Qui & ſua habent plana ordinatim applicata.*

Si vero ſecetur Conoides Hyperbolicum plano per Axem (vel Diametrum potius) *non tranſeunte; poteſt eâ Sectio vel eſſe Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipſis* (circulúſve.)

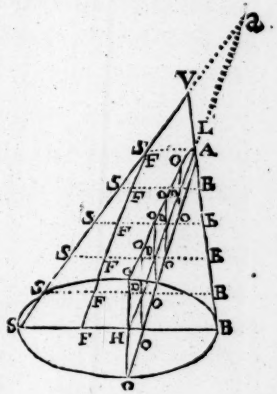
Et quidem de (Pyramidoidibus & præſertim) Conoidibus, Parabolicis Ellipticis & Hyperbolicis; eorúmq; Axibus ſive Diametris, interceptis & tranſverſis; Planiſq; ordinatim applicatis, ſecantibus, & tangentibus; Centris, item & Lateribus-Rectis, aliiſq; ejuſmodi: facile eſſet novam quidem nec injucundam diſquiſitionem inſtituere; (ad quod etiam ſatis proclivis ſum, cùm totam fere iſtius negotii difficultatem jam ſuperaverim, nec quicquam ferè ſuperſit aliud quàm ut quæ mente concepi verbis exprimam:) Verùm illud non eſt hujus loci; neq; jam licet nimium divagari. Et forſan alii cuidam non ingratum erit, ex eâ methodo quam nos in Coni-ſectionum tractatione calcamus, anſam arripere tale quid in Conoidibus exercendi. Nobis interim & monuiſſe & innuiſſe hic loci ſufficiat: aliud enim eſt quod præ manibus habemus.

PROP.

PROP. XX.

De Hyperbolæ Latere-Recto.

CUm ſit in Hyperbola, ut dictum eſt, DOq=BD×DS; adeoq; quantitas ordinatim-applicatarum DO, ex cognitis rectis BD, DS, cognoſci poſſit; non contra: (cùm poſſint rectæ BD, DS, infinitis modis variari, pro conorum variorum diverſitate, aut etiam varia ad eundem conum applicatione, dum interim rectarum DO quantitas eadem maneat; ſicut de Parabolâ & Ellipſi ſupra dictum eſt prop. 12, & 16.) Commodum igitur viſum eſt Conicorum Scriptoribus, harum loco, alias menſuras ſubſtituere, quibus Ordinatim-applicatarum quantitatem exprimant, quæ eandem Hyperbolam ubique comitentur in quocunq; demum cono, aut quocunq; ad illum modo applicetur, aut etiam extra conum conſtituatur. (Quod & de Parabolâ & Ellipſi factum eſſe ſupra declaratum eſt.)



Nempe, pro ſingulis rectis BD, ſubſtituunt ſingulas AD diametros-interceptas, quæ quidem illis ſunt proportionales.

Pro rectâ verò AS, ſubſtituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus-rectum* appellant;) quæ tribus DB, AS, DA, ſit quarta reciprocè proportionalis; ut ſit ubiq; DB×AS=DA×AL; adeóq; Latus rectum

ctum $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Deniq; (producta prius diametro DA, extra Hyperbolam, donec Opposito vel Triangulo vel Cono occurrat in a, ut habeatur Diameter-transversa Aa,) erit (propter similia triangula) Aa. AS :: Da. DS = $\frac{Da}{Aa} \times AS$; ideoq; $BD \times DS$ (=DOq) = $\frac{Da}{Aa} \times AS \times BD$ = $\frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$, (quia nempe $BD \times AS = DA \times LA$ ut dictum est.)

Hoc est, (substitutis idoneis Symbolis, nempe t = Aa, d = DA, $t+d$ = Da, l = LA, & b = DO,) Quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbolâ $b^2 = \frac{t+d}{t} ld$ = $\frac{td+d^2}{t} l = dl + \frac{d}{t} dl = ld + \frac{l}{t} d^2$ (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem tam separatim ld = FD × DB, & $\frac{l}{t} d^2$ = FS × DB, quam conjunctim $ld + \frac{l}{t} d^2$ = FD × DB + FS × DB = SD × DB = DOq.

Estq; hoc quidem primarium atq; essentiale Hyperbolæ symptoma, unde reliqua dependent omnia & calculo comprobari possunt. Reliquas Hyperbolæ affectiones deinceps investigabimus, ubi absolutam ipsius tractationem (sine respectu habito ad Conum) instituemus.

Atq; hactenus quidem *Coni-sectiones* vulgo dictas, Parabolam, Ellipsin, atq; Hyperbolam, inspecto Cono consideravimus; ut quæ a Cono secto (quod & nomen innuit) originem traxisse reputantur. Adeóq; primaria illarum symptomata ab ipso deduxi; quod & de aliis illarum affectionibus feciſſe (si id opus esset) non adeo esset difficile. Quoniam autem earum natura magis absoluta est, quam ut ad Conum solum pertinere videantur; priorem contemplationem eousq; prosecutus sum, ut & fontes aperirem unde Veteres doctrinam suam hausisse videntur, & quibus passibus ad abstrusas illas quas exhibent demonstrationes aut pervenerint aut saltem pervenisse potuerint; Et essentialia

essentialia illarum symptomata inde deducerem, ut tandem liceat illas etiam extra Conum suum intelligere, aut etiam (si libet) de Cono in Conum transferre; cum earum affectiones reliquæ ex jam traditis (etiam sine Coni auxilio) deduci possint, ut in sequentibus patebit. Non autem earum affectiones omnes ea methodo prosecutus sum; quoniam illarum traditio ex absoluta, quæ sequitur, tractatione (sepolito Cono) & clarius & facilius peragi potest, nec opus sit rem eandem iteratò agere.

PARS

PARS SECUNDA.

CUM tradita ſint in præcedentibus Parabolæ, Ellipſis, *atq;* Hyperbolæ, (*quas* Coniſectiones *appellant,*) *eſſentialia ſymptomata, ab ipſo ſecto Cono* (*unde Originem traxiſſe exiſtimantur*) *deſumpta; quæ ipſarum naturam abſolutam ita interim exponunt, ut ſive a Secto Cono, ſive aliunde geneſin ſortiantur eadem natura abſoluta eiſdem characteribus deſignanda eſſet: Licebit in ſequentibus illas* (*ſive lineas ſive figuras*) *ſecundum abſolutam quam in ſe habent naturam contemplari, ſine reſpectu ad geneſin habito, quæ vel a Sectione Coni, vel etiam aliunde contingere poſſit: Et quidem undecunq; contingat, abſolutam earum contemplationem nequiquam conturbet.*

PROP. XXI.

De Parabola, abſolutè conſideratâ.

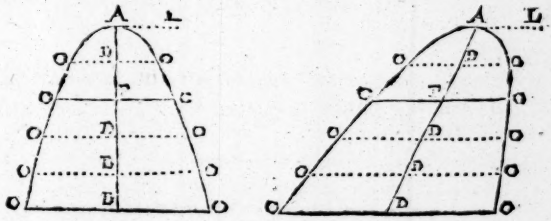
CUm ſit in Parabola Quadratum Ordinatim-applicatæ cujuſlibet ($p^2 = ld$) æquale rectangulo quod intercepta Diametro & Latere-recto comprehenditur, (ut, inſpecto Cono ſupra deprehendimus, prop. 12.) Licebit jam Parabolam, eo charactere ornatam, ſuo Cono eximere, atq; abſolutè quidem & Univerſaliter definire.

Parabolam igitur appello eam (ſive lineam curvam in plano deſcriptam, ſive figuram planam, ejuſmodi curvâ terminatam, puta OAO) cujus ordinatim-applicatarum

plicatarum quadrata ſunt interceptis-diametris proportionalia.

Rectam vero (imaginariam) quæ cum interceptis-diametris (tanquam communis altitudo) continebit rectangula (ipſis quidem diametris-interceptis proportionalia) Quadratis illis Ordinatim-applicatarum æqualia, appello *Latus-Rectum*; puta LA.

Ordinatim-applicatas verò appello, (DO, PO,) ſemiſſes parallelarum rectarum, (OO, OO,) Parabolâ utrinq; terminatarum (quas *Ordinatim-inſcriptas*, vel *Ordinatim-ſubtenſas* appello) una linea recta (puta ADP, quam appello *Diametrum*) biſectarum.



Punctum autem illud biſectionis, (D vel P,) *Punctum applicationis* appello; in quo quippe Diametro ſuæ applicatur ea quam Ordinatim-applicatam diximus.

Diametri vero ſegmentum, puncto-applicationis & curva Parabolica comprehenſum, (AD, AP,) *Diametrum-interceptam* appello.

Punctumq; Diametri in curva illa exiſtens (puta A) appello *Verticem*, (tam Diametri, quàm ipſius Parabolæ, ſecundum illam Diametrum conſideratæ.)

Ordinatim-poſitas appello non modo eas, quas ſupra *Ordinatim-inſcriptas*, atq; *Ordinatim-applicatas dixi*, (quæ vel utrinq; vel ab altera ſaltem parte Parabola

rabola terminantur,) ſed alias quaſvis ipſis parallelas (quantævis longitudinis) Diametro ſimiliter appoſitas, & propterea eoſdem cum diametro angulos facientes.

Atq; hinc quidem, ſi fuiſſet res integra, neq; Conicæ Sectiones, ut vocantur, Originem a Cono traxiſſe vulgo reputarentur, (quare & mihi neceſſe erat eas, ſecundum illam etiam hypotheſin exponere, ne videar novas quaſdam figuras comminiſci, potius quam ab aliis receptas explicare:) licuiſſet totius hujuſce tractationis initium poſuiſſe, omiſſis eis omnibus quæ ſuperius in parte prima exhibuimus; aut ea ſaltem (ſi libuiſſet adjungere) hinc quaſi a vero fonte demonſtraſſe. (Adeoq; novas terminorum aliquot definitiones neceſſe eſt & hîc & deinceps aliquoties adjungere, omiſſa Coni mentione, ne opus ſit ad præcedentia recurrere, aut Coni auxilium in definitionibus poſtulare.)

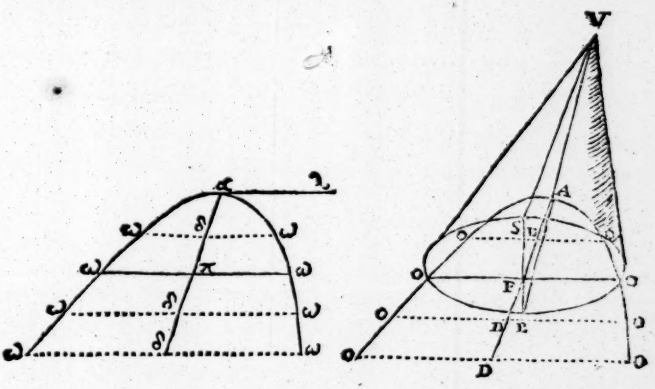
Non enim eſt *Parabolæ* magis eſſentiale, ut fiat *Sectione Coni Plano lateri parallelo*; quam *Circulo*, ut fiat *Sectione Coni plano baſi parallelo*; aut *Triangulo*, ut fiat *Sectione Coni per Verticem*. Neq; illud volunt alii: Quamvis enim Parabolam (quod & de aliis Coni-Sectionibus ſimiliter intelligendum eſt) ſecto Cono generari definiant; non tamen ſolas illas, quæ ſectione Coni fiunt, pro Parabolis habent, (nam & alios agnoſcunt Parabolam in plano deſcribendi modos;) ſed tales eſſe volunt (ſive figuras ſive lineas curvas) quales ejuſmodi ſectione Coni fieri poſſunt.

Parabolam autem a *nobis definitam eandem eſſe cum Parabola Apollonii*, & aliorum; talem nempe, qualis ſectione Coni effici poſſit: Sic demonſtro.

Eſto Parabola quælibet a nobis definita $\alpha\omega$, (cujuſq; Ordinatim applicata quælibet $\pi\omega$, cum diametro $\alpha\pi$ angulum $\alpha\pi\omega$ quemcunq; faciens; ſitq; $\alpha\lambda$ latus rectum.) Dico hanc Parabolam talem eſſe qualis ſectione Coni effici poſſet.

Fiant enim rectæ $AP = PB = \alpha\pi$; ſitq; angulus APB rectus & (continuata BP) fiat $PS = \alpha\lambda$; & jungatur recta BA, quæ (continuata) concurrat cum rectâ SV (ipſi PA parallela) in V, ut compleatur triangulum VBS; ſuper quod erigatur circulus

culus diametrum habens BS, qui cùm triangulo VBS angulum inclinationis faciat æqualem angulo $\alpha\pi\omega$; eiq; paralleli



circuli alii infiniti ſupponantur, (diametros habentes in triangulo VBS ipſi BS parallelas) qui conum VBOS compleant (per prop. 5) per cujus axem incedit VBS Triangulum (quippe in quo reperiuntur omnium circulorum parallelorum diametri.) Tum erigatur planum APO triangulo VBS rectum, quod igitur ſecabit circulum SOB ſecundum rectam PO, quæ (propter angulum etiam APB rectum) perpendicularis erit rectæ BS, per 3 & 4 dd 11, (angulumq; APO conſtituet æqualem inclinationi planorum, per 6d 11, adeóq; angulo $\alpha\pi\omega$,) Planum igitur APO, coniſectionem efficit AO: cúmq; ipſius diameter AP parallela ſit VS oppoſito cruri trianguli peraxem; ſectio illa erit parabola, qualem deſcripſimus prop. 7. (ut inde patet;) hoc eſt, qualem definit Apollonius prop. 11. lib. 1. Conicorum.

Sed & eidem congruit Parabola propoſita, a nobis definita. Nam quadratum PO (=BP×PS) æquatur quadrato $\pi\omega$ (=$\pi\alpha\times\alpha\lambda$,) cùm ſit (ex conſtructione) $\pi\alpha$=PB, & $\alpha\lambda$=PS; adeoq; & recta PO=$\pi\omega$. Sed & (ex conſtructione) AP=$\alpha\pi$, & angulus APO=$\alpha\pi\omega$, (ut oſtenſum eſt:) congruunt ergo rectæ AP, PO, rectis $\alpha\pi$, $\pi\omega$, (& angulus comprehenſus angulo comprehenſo:)

henſo:) Atq; eâdem ratione reliquæ ordinatim-applicatæ DO reliquis *Do* congruunt, adeóq; & Parabola Parabolæ congruit. Parabola igitur a nobis definita, Parabolæ ſectione coni factæ congruit, adeóq; talis eſt qualis ſectione coni effici poſſet. Quod erat primo demonſtrandum.

Contrà verò, Parabolam ſectione Coni factam talem eſſe qualem nos deſcripſimus (nempe quadratæ ordinatim-applicatarum habere diametris interceptis proportionalia) ſupra demonſtratum eſt prop. 8 & 12.

Eadem igitur eſt Parabola quæ ab Apollonio (aliiſq;) & quæ a nobis definitur. Quod oſtendiſſe par erat.

Sed & eâdem opera docuimus, *Conum conſtruere, eiq; datam Parabolam ita aptare, ut data ipſius diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atq; etiam Theorematice verum eſſe, *Parabolæ diametrum quamlibet fieri poſſe (in aliquo ſaltem Cono) diametrum-ex-generatione; & quomodo illud fiat.* (quamvis & illud aliis mille modis fieri poſſit.)

An verò univerſaliter verum ſit, *Datam Parabolam dato Cono ita aptari poſſe, ut data ipſius diameter fiat diameter-ex-generatione*, eſt alia diſquiſitio. Eſt autem & illud verum, modò datæ diametri ad ſuas ordinatim-applicatas obliquitas major non ſit quam obliquitas Axis aſſignati Coni ad baſin ſuam. Si ſecus autem; illud non fiet dummodo ſolum circulum pro Coni baſe agnoſcimus. Si verò admittatur, ut non modo Circulus, ſed & Ellipſis quælibet, pro baſe Coni reputetur; etiam univerſaliter illud verum erit, neq; determinatione indigebit Theorema. Hoc autem obiter tantum ſine Demonſtratione moneo; quoniam nec illud eſt hujus loci, nec mihi animus eſt ad ſingulas minutias deſcendere. Ad reliquas igitur Parabolæ affectiones calculo comprobandas feſtino.

PROP. XXII.

Corollaria.

PAtet ex dictis; Quod cum ſit (ut oſtenſum eſt) $p^2 = ld$; erunt, in Parabolâ, Diameter-intercepta, Ordinatim-applicata, & Latus-Rectum, continuè proportionalia.

Adeoq;

Adeoq;, Datis eorum duobus quibuſvis, etiam reliquum (magnitudine) datur. Nempe,

In Parabolâ { Ordinatim-applicata, $p = \sqrt{ld}$. ejuſq; quadratum, $p^2 = ld$. Latus-Rectum, $l = \frac{p^2}{d}$. Diameter-intercepta, $d = \frac{p^2}{l}$.

Patet etiam; Ordinatim-applicatas, prout longius a vertice applicantur, ita ſemper augeri, (cùm ipſarum quadrata ſint interceptis diametris, hoc eſt, diſtantiis punctorum-applicationis a vertice, proportionalia.)

Et propterea, Parabolam ejuſmodi curvam eſſe, quæ per ſe figuram non comprehendet; cum crura perpetuo magis divaricentur, nec ſint unquam (extra punctum verticis) coitura.

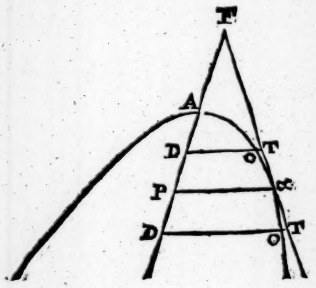
PROP. XXIII.

De Rectâ Parabolam contingente.

SI, ſumpto ubivis in Parabolæ diametro puncto P, cui ordinatim-applicetur Pα; diameter PA extra Parabolam continuetur ut fiat continuatio AF, ipſi AP diametro interceptæ æqualis; recta Fα ducta, Parabolam in puncto α continget. *Et contra*; Si Parabolam in α contingat recta αF, diametro productæ occurrens in F; erit AF (continuatio) ipſi AP (diametro-intercepte) æqualis.

Nam ſumpto, in eâdem diametro, puncto quovis D, cui ordinatim-applicetur DO, quæ ad rectam Fα pertingat in T; Dico punctum T vel idem eſſe cum puncto α, vel extra Parabolam cadere: hoc eſt, rectam DT vel æqualem eſſe rectæ DO (ſi nempe puncta D, P, coincidant,) vel (ſi alibi ſumatur D) longiorem.

Esto enim (ob commodiorem calculum) $P\alpha = p$, $PA = d$ (ideoq; $PF = 2d$,) $PD = a$, (ideoq; $DA = d \pm a$, $DF = 2d \pm a$, variatis nempe signis +, −, prout supponitur punctum D infra vel supra punctum P assumi.)



Erit igitur (propter Parabolam) $PA.DA :: P\alpha q.DOq.$ hoc est, $d.d \pm a :: p^2. \frac{d \pm a}{d} p^2 = DOq.$

Et (propter similia triangula) $PF.DF :: P\alpha.DT.$ hoc est, $2d.2d \pm a :: p. \frac{2d \pm a}{2d} p = DT$, hujusq; quadratum $\frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4a^2} p^2 = DTq.$

Est igitur differentia quadratorum $DTq - DOq = \frac{d \pm a}{d} p^2 - \frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4a^2} p^2 = \frac{a^2}{4a^2} p^2$. Quæ quidem vel aliqua est, si puncta P, D, distent, (sitq; propterea a quantitas realis;) vel omnino nulla, si coincidant puncta P, D; (evanescente quippe quantitate a, adeóq; & ipsius multiplicibus omnibus.) Hoc est, quadrata DTq, DOq, & propterea eorum latera DT, DO, vel æqualia sunt, si sumatur punctum D idem atq; P; vel illud majus est, si alibi sumatur D. Et propterea, cum rectæ αF (quantumvis utrinq; productæ) singula puncta ipso α excepto, sint extra parabolam; ea Parabolam in unico puncto α contingit. Quod erat Demonstrandum.

Estq; hæc nostra demonstratio multo expeditior, quam quæ ab Apollonio aliisq;, (adhibito Cono, variisq; lemmatis præmissis) adducuntur.

Si verò propositio hæc non fuisset antehac excogitata, sed a nobis jam quærenda: *Illud Analytice sic fieri possit.*

Supponamus rem quasi jam factam; contingentem αF, diametro productæ occurrere in F: & quærenda sit longitudo rectæ PF.

Retineatur eadem quæ prius figura; eademq; symbola, nisi quod

quod pro PF (nondum cognita) ſubſtituatur f, adeoq; pro DF, $f \pm a$. Erunt igitur (ut prius) PA. DA :: Pαq. DOq = $\frac{d \pm a}{d} p^2$. Et PF. DF :: Pα. DT. (hoc eſt, f. $f \pm a$ :: p. $\frac{f \pm a}{f} p$ = DT. Et $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f2} p^2$ = DTq.

Eſt item (propter tangentem) DT $\geqslant$ DO (hoc eſt, DT æqualis vel major quàm DO; illud quidem ſi D, P, coincidant; hoc, ſi ſecus) & DTq $\geqslant$ DOq, hoc eſt $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f2} p^2 \geqslant \frac{d \pm a}{d} p^2$; & (utrumq; multiplicando in $df2$ & dividendo per p^2) erit $df^2 \pm 2dfa + da^2 \geqslant af^2 \pm f^2a$: & (auferendo utrinq; $df2$, atq; dividendo per $\mp a$) $2df \pm da \geqslant f^2$.

Deniq; ponendo D P idem punctum (ut evaneſcat quantitas a, adeoq; & da,) erit $2df = f^2$, hoc eſt $2d = f$. Quod eſt ipſum Theorema quod inveſtigandum erat, quodq; modo demonſtravimus.

Converſa propoſitionis propoſitæ; nempe *Parabolæ tangentem αF diametro PA productæ occurſuram, & quidem ita ut abſcindat rectam AF ipſi AP æqualem*; ex dictis ſatis patet, vel inde ſaltem facile deduci poteſt.

Atq; etiam; *Rectam AF Parabolam in unico puncto contingere.*

Item, *Ab eodem puncto F, atq; ad eaſdem partes, rectam aliam quæ Parabolam contingat duci non poſſe.*

Et, *Parabolam in eodem puncto α non niſi unicam rectam contingere poſſe.*

Adeoq; *In locum inter curvam αA rectamq; contingentem αF, aliam rectam lineam cadere non poſſe*: (Hoc eſt, prout ego alibi peculiari tractatu fuſius demonſtravi, *Angulum qui Contactus dicitur, eſſe angulum nullius magnitudinis, ſive non-Angulum.*)

Verùm cum ea non difficulter calculo demonſtrari poſſint (demonſtrationibus præcedenti non abſimilibus) ego, partim ut tyronibus quo ſe exerceant relinquam, partim ne aliis tædio ſim, eis ſigillatim demonſtrandis ſupersedeo.

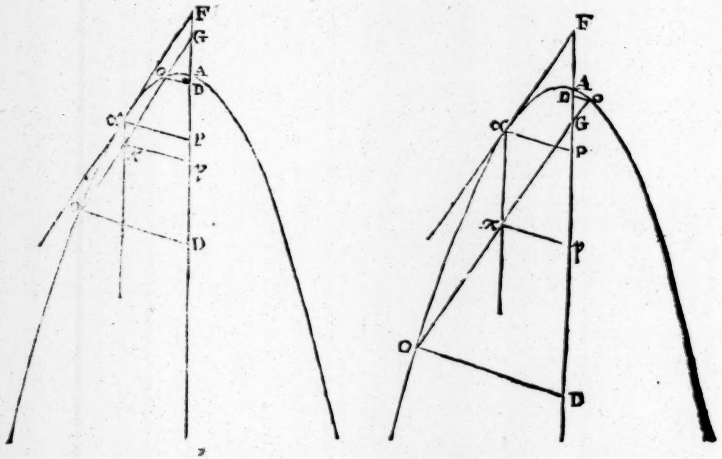
PROP. XXIV.

De Parabolæ Diametris.

SI a puncto quovis α in Parabolæ curvâ Aα, ducatur recta απ parallela diametro AP: Erit απ sic ducta ejusdem Parabolæ diameter; verticem habens α, & Ordinatim-applicatas πO rectæ αF (Parabolam in vertice α contingenti) parallelas.

Libet hanc *Propositionem primo Analyticè examinare*, deinde & Synthetic è demonstrare.

Supponamus igitur rem ita esse ut perhibetur: adeóq; inscriptam OO, rectæ αF parallelam, atq; in π bisectam sintq;



rectæ OD, OD, αP, diametro AP, ordinatim applicatæ, adeóq; invicem parallelæ: quibus etiam parallela ducatur πp, quæ igitur (propter parallelas) bisecabit (ut rectam OO, sic) rectum DD. Deniq; recta OO (producta si opus) occurrat diametro

AP

AP (saltem productæ) in G. (occursuram autem certum est, cum ipsi parallela αF eidem diametro occurrat, puta in F, per præcedentem.) Erúntq; (propter parallelas) Pp=απ=FG: & propterea PF=pG.

Tum substitutis (ob commodiorem calculum) idoneis symbolis, esto Pα=p. PA=d. (ideóq; per præced: PF=pG=2d.) Pp=απ=FG=g. (ergo pA=pP+PA=d+g) pD=q. (ideoq; DA=pA ±pD=d+g ± q. & DG=pG ∓ pD=2d ∓q.)

Erit igitur (propter Parabolam) PA.DA::Pαq. DOq. hoc est $d.\ d+g \pm q :: p^2.\ \frac{d+g \pm q}{d}p^2$=DOq.

Item (propter similia triangula) PF. PA:: DG. DO. hoc est $2d.\ p :: 2d \mp q.\ \frac{2d \mp q}{2d}p$=DO. Et (sumendo quadrata)

$$\frac{4d^2 \pm 4dq + q^2}{4d^2}p^2 = \text{DOq} = \frac{d+g \pm q}{d}p^2.$$

Ergo (utrinq; dividendo per p^2 & multiplicando per $4d^2$) $4d^2 \pm 4dq + q^2 = 4d^2 + 4dg \pm 4dq$. hoc est (sublatis utrinq; æqualibus) $q^2 = 4dg$. Adeoq; inventa est quantitas q, adeóq; & puncta D,D. quibus Ordinatim applicantur DO,DO, Vera igitur est propositio.

Illud Synthetice sic demonstrabimus, premendo Analyseos vestigia.

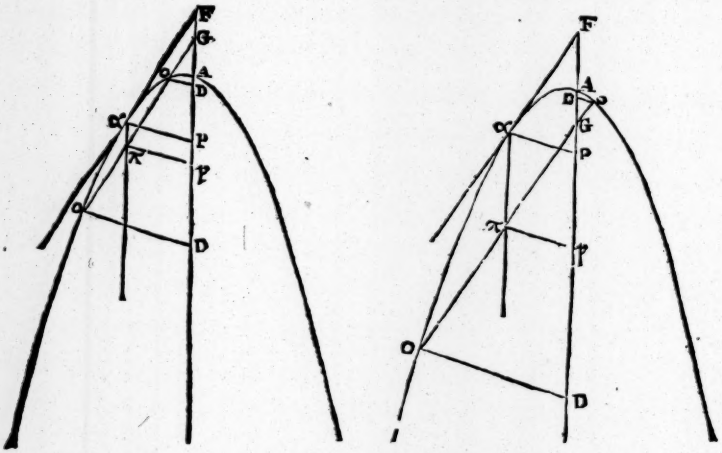
Diametro AP ducatur parallela απ, per cujus punctum quodvis (intra parabolam) π, ducatur recta πG diametro occurrens in G, & parallela tangenti αF occurrenti diametro in F. Dico απ ejusdem Parabolæ diametrum esse eíq; ordinatim poni πG.

Diametro AP ordinatim applicetur αP, eíq; parallela ducatur πp diametro occurrens in p. Et sunto symbola Pα=p, PA=d. FG=απ=g.

Tum sumantur in diametro utrinq; a puncto p, æquales rectæ pD=($\sqrt{4dg}$=)$2\sqrt{dg}$. (hoc est, duplum mediæ proportionalis inter AP, απ, rectas.) atq; punctis D, D, ordinatim ponantur DO, DO, rectæ πG occurrentes in O,O; quæ cum parallelæ sint rectæ πp, sicut recta DD (ex constructione) bisecatur

secatur in p, erit ideo & OO (propter parallelas) bisecta in π.

Restat ut ostendam rectam illam O O (bisectam in π) Parabolæ inscriptam esse, (ut απ recta bisecans sit diameter,) hoc est, puncta O O esse in Parabolæ Curva. Quod sic probatur.



Est pA = PA+Pp = d+g. DA = pA ∓ pD = d+g ∓2√dg. pG = PF = 2d. DG = pG ∓ pD = 2d ∓2√dg.

Tum (propter parabolam) ut PA, ad DA; sic Pαq quadratum ordinatim-applicatæ puncto P, ad quadratum ordinatim-applicatæ puncto D: hoc est, d. d+g ∓2√dg :: p². $\frac{d+g \mp 2\sqrt{dg}}{d}p^2$. quod igitur est quadratum ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem est quadratum rectæ DO. Nam (propter similia triangula) PF.Pα :: DG.DO. hoc est, 2d.p :: 2d ∓2√dg. $\frac{2d \mp 2\sqrt{dg}}{2d}p$ = DO. Ejusq; quadratū DOq = $\frac{4d^2+4dg \mp 8d\sqrt{dg}}{4d^2}p^2$ = $\frac{d+g \mp 2\sqrt{dg}}{d}p^2$.

Est igitur quadratum rectæ DO æquale quadrato ordinatim applicatæ

applicatæ puncto D; adeoq; recta DO ipsi ordinatim-applicatæ æqualis. Sed & puncto D ordinatim-ponitur recta DO (ex constructione) ergo ordinatim-applicata est: punctaq; O O propterea sunt in ipsa Parabolæ curvâ, adeóq; OO recta Parabolæ inscripta. Sed & eam (atq; eâdem ratione ipsi parallelas inscriptas omnes) bisecat recta $a\pi$. Est igitur (per def.) $a\pi$ diameter, eiq; ordinatim-applicata πO, (ordinatim-inscriptæ semissis.) Quod erat demonstrandum.

Monendum autem hic est, quòd cum (tam in Analysi quam in Synthesi) dicimus duarum rectarum DG, alteram quidem æqualem esse $pG \sim pD$, hoc est, differentiæ rectarum pG, pD, fieri quidem potest ut quandoq; pG (nempe quoties recta OO diametrum AP non transit) quandoq; pD (nempe ubi OO transit AP) major esse: Adeoq; $pG \sim pD$, nunc per $pG - pD$, nunc per $pD - pG$, interpretandi erit. Verùm hoc calculum non omnino perturbat; quoniâ ea quantitas in operationis progressu quadranda occurrit: quo casu, utrumvis contingat, eadem quadrata prodibunt. Nempe cum sit in Analysi $\frac{2d \pm q}{2d} p = DO$, sive exponatur $\frac{2d \pm q}{2d} p = DO$ (ut ubi OO non transit AP,) sive $\frac{q \pm 2d}{2d} p = DO$ (ut ubi transit,) utrovis modo erit $\frac{4d^2 + q^2 \pm 4dq}{4d^2} p^2 = DOq$. Et pariter contingit in Demonstratione Synthetica. Quod monuisse sufficit.

Possent hic alia Theoremata multa sigillatim ostendi, puta.

Quodlibet Curvæ Parabolicæ punctum alicujus Diametri verticem esse.

Adeoq; *In qualibet Parabola infinitos esse Vertices, atq; Diametros infinitas.*

Item; *Parabolæ Diametros omnes esse invicem Parallelas.*

Et; *Quamlibet rectam (in eodem plano) cuilibet Parabolæ Diametro parallelam, ejusdem Parabolæ Diametrum etiam esse; eiq; in uno aliquo, & quidem unico, puncto occurrere.*

Item; *Quamlibet in eodem plano rectam, per aliquod intra Parabolam punctum transeuntem, Diametro non parallelam, in binis punctis Parabolæ occurrere; & alicui Diametro Ordinatim-positam esse.*

Et; *Quæ vel alicui Parabolæ Diametro Ordinatim-posita est, vel Diametrum aliquam quocunq; modo secat, vel quæ Parabolam secat (aut ipsi occurrit) in binis punctis; nec illius Parabolæ Diametrum esse, nec ipsius Diametro ulli parallelam.*

Item; *Quæ Parabolæ Diametro alicui in vertice occurrit ordinatim-applicatis parallela, Parabolam in illo puncto contingere.*

Et; *Quæ Parabolam contingit, Diametri per contactûs punctum transeuntis Ordinatim-applicatis parallelam esse: adeoq; eidem Diametro Ordinatim positam.*

His autem, aliisq; consimilibus, sigillatim demonstrandis, non immorandum esse sentio; Cùm ea vel in progressu præcedentium Demonstrationum satis jam ostensa sint; vel ex eisdem principiis facilè demonstrari possint.

PROP. XXV.

Effectiones Geometricæ.

EX præcedentibus, non erit difficile Geometricas Effectiones colligere. puta,

Datæ Parabolæ Diametrum invenire. Nam recta, quaslibet duas inscriptas parallelas bisecans, est Diameter.

Item, *Per datum quodvis in eodem plano punctum, rectam ducere quæ sit Parabolæ datæ Diameter.* Inventa enim (ut prius) una qualibet diametro, recta huic parallela per datum punctum ducta, est Diameter quæsita.

Item, *Parabolæ Axem reperire.* Inscriptâ nempe rectâ quæ Diametrum quamlibet ad angulos rectos secet; ea quæ per hujus medium punctum transit Diameter, est Parabolæ Axis.

Item, *Datæ Diametri ordinatim-applicatas positione invenire.* vel, quod tantundem est, *Angulum inclinationis invenire.* Ductis nempe binis diametro datæ parallelis rectis, utrinq; ab illa æqualiter remotis, quæ Parabolam secent; recta sectionum puncta conjungens est datæ diametro ordinatim-applicata, reliquæq; omnes huic parallelæ.

Item, *Latus-Rectum invenire datæ in datâ Parabolâ Diametro conveniens.* Est enim Latus-rectum, Diametro-interceptæ & Ordinatim-

dinatim-applicatæ tertia continuè proportionalis.

Item, *Ad datum datæ diametri punctum ordinatim-applicatam in datâ Parabolâ ducere.* Est enim interceptæ-diametro & lateri-recto media proportionalis, Diametro, juxta inclinationis angulum, applicanda.

Item, *Ad datam diametrum, datumq; Latus-rectum, Parabolam in dato inclinationis angulo ducere.* Nam positis ad datam Diametrum in dato angulo quolibet ordinatim-applicatis, curva per earum omnium extremitates æquabiliter ducta est Parabola.

Verum ego harum omnium effectionum demonstrationes omitto; partim ut tædio non sim, partim ut sit quo se exerceant tyrones, præsertim cum illæ ex prædictis facilè possint elici. Atq; eisdem de causis multa alia & Theoremata & Problemata lubens prætereo; cùm nobis non sit animus vel singulis minutiis insistendi, vel propositiones citra necessitatem multiplicandi. Quod etiam de sequentibus intelligendum erit.

PROP. XXVI.

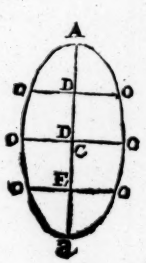
De Ellipsi absolute consideratâ.

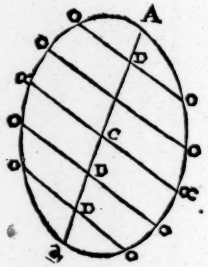
CUm sit in Ellipsi (ut ostensum est, prop. 16.) Quadratum ordinatim-applicatæ $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ Licebit jam (ut prius Parabolam, sic) Ellipsin eo charactere insignitam, suo Cono eximere, atq; absolutè quidem & universaliter contemplari, acsi nullam omnino ad Conum relationem haberet; ut nec circulus (quæ quidem una est Ellipseos species) habere vulgò censetur.

Ellipsin igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam ejusmodi curvâ terminatam,) cujus ordinatim-applicatarum singularum quadrata, æquantur differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem Majora sunt interceptis-Diametris, Minora vero earundem quadratis proportionalia. (Nempe $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Sunt enim re-

ctangula ld, ipſis d diametris interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l: ipſa vero $\frac{l}{t}d^2$ diametrorum interceptarum quadratis d^2 proportionalia, propter communem rationem $\frac{l}{t}$.)

Diametrum, Diametros-interceptas, Verticem, Ordina-





tim-poſitas, Ordinatim-inſcriptas, (ſive *Ordinatim-ſubtenſas,*) *Ordinatim-applicatas,* atq; *Punctum-applicationis*; eodem ſenſu hic accipio quo ſuprà de Parabolâ iiſdem uſus ſum.

Rectam notâ l inſignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis-diametris, continere ſupponitur rectangula Majora, diametris-interceptis proportionalia,) appello *Latus-Rectum.*

Rectam verò alteram, quæ nota t deſignatur, (quam quidem ſupponimus Diametri ſegmentum eſſe, a vertice verſus concavam Curvæ partem ductam; quæq; ita ſe habet ad latus rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad rectangula Minora, illis quadratis proportionalia,) *Diametrum tranſverſam* appello; (ut quæ oppoſitos vertices conjungit, puta Aa, ut mox dicetur:) ejuſq; punctum medium, (quod

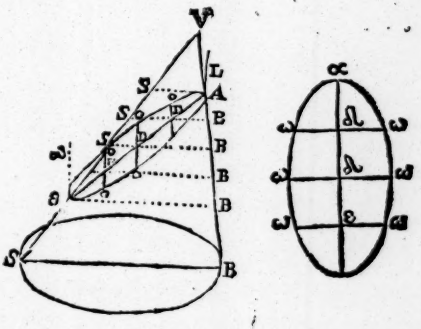
in

in ipſa Diametro intra Ellipſin jacere ſupponimus, nempe intra oppoſitos vertices,) appello *Centrum*.

Ellipſin a nobis definitam eandem eſſe cum ea quam definit Apollonius, (niſi quod nos etiam circulum, ſeu circuli Peripheriam, eâdem voce includamus, quam excludit Apollonius;) eodem fere progreſſu demonſtrari poteſt, quo ſupra oſtendimus Parabolam noſtram eandem eſſe atq; illius.

Nempe, Ellipſi Apollonianæ, Sectione Coni factæ (quæ ab Apollonio deſcribitur p. 13. lib. 1. Con.) univerſaliter convenire definitionem noſtram; jam probatum eſt prop. 13. & 16.

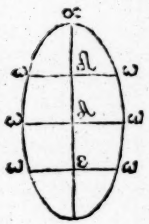
Ellipſin a nobis definitam quamlibet (modò circulum ſeu Peripheriam excipias, quam ego ſub eâ voce comprehendo, contra quàm Apollonius,) ita Cono aptari poſſe ut conditiones eas habeat quas poſtulat Ellipſis Apolloniana; ſic probatur.

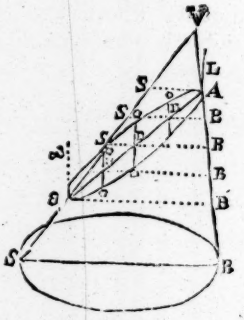


Exponatur Ellipſis quælibet a nobis definita, $\alpha\omega$, cujus ordinatim-applicatarum quadrata ſint $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Dico hanc Cono ita aptari poſſe ut poſtulatur.

Ducantur enim rectæ $Aa = t$, $AS = l$, continentes angulum SAa quemcunq; acutum, (modo major ſit complemento anguli inclinationis in Ellipſe expoſita, quem faciunt ordinatim-

applicatæ cum expositâ diametro;) ipsiq; AS parallela ponatur aB=Aa=*l*, angulum faciens AaB=SAa: (saltem tantæ sint longitudinis AS, aB, ut sit AS×aB=*lt*; modo interim non sint AS, aB, invicem æquales; eo enim casu non Conus, sed Cylindrus prodiret:) Et jungantur rectæ aS, BA, quæ continuatæ coeant in V, complentes triangulum VaB, (si nempe aB major sit quam AS, prout jam supponimus; vel, si secus, triangulum VAS:) quod esto triangulum per axem Coni mox construendi.





Deinde super rectas Aa, aB, duo plana ita erigantur ut communis earum sectio aω faciat cum rectâ aB angulum rectum, cum rectâ verò Aa angulum æqualem angulo inclinationis Ellipseos propositæ. Hoc enim omnino fieri posse constat: Si enim erigatur in puncto a recta aω, quæ sit recta plano trianguli, (adeóq; utrosq; angulos ωaA, ωaB, rectos faciat per 3 d 11,) circumvolvatur circa rectam aB ut axem, invariato angulo ωaB, donec ad situm plani VaB perveniat, faciatq; in plano trianguli angulum ωaA acutum; qui minor erit angulo (acuto, intellige, nisi uterq; rectus sit,) inclinationis Ellipseos expositæ, (cum sit, ex constructione, angulus AaB complemento inclinationis major;) necesse est ut in transitu aliquando fecerit angulum, inclinationis angulo æqualem, (factus enim est transitus ab angulo recto, adeoq; debito majori, vel saltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoq; tunc fuerit in situ debi-

to

to, ut fit duorum planorum communis ſectio qualis imperatur.

In plano autem aωB ſic poſito, ſcribi intelligatur circulus diametrum habens aB, qui ſit baſis Coni; aliiq; huic paralleli conum complentes, juxta prop. 53 qui plano Aωa ſectus Ellipſin exhibebit, per prop. 7. cujus ordinatim-applicatæ eandem ad Diametrum inclinationem habebunt, quam quæ in Ellipſi expoſitâ, adeóq; ſimiliter poſitæ ſunt; eruntq; etiam longitudine æquales, ut probari poterit per prop. 13 & 16. Congruunt igitur Ellipſis expoſita, & quæ in Cono exhibetur. Adeóq;, eadem eſt Ellipſis a nobis definita (niſi quod nos etiam circulum ea definitione comprehendamus) atq; Ellipſis Apollonii. Quod erat demonſtrandum.

Sed & eadem opera docuimus, *Conum conſtruere, eiq; datam Ellipſin ita aptare, ut data Ellipſeos Diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atq; etiam Theorematice verum eſſe, *Ellipſeos diametrum quamlibet, fieri poſſe, in aliquo ſaltem Cono, Diametrum-ex generatione.*

PROP. XXVII.

De Ellipſeos Diametro-tranſverſa & Verticibus-Oppoſitis.

SI Ellipſeos Diameter-intercepta AD intelligatur (a vertice A verſus concavam curvæ partem) tanta aſſumi, ut rectæ quam *t* diximus ſit æqualis, (hoc eſt, ita ſe habeat ad latus rectum, ut interceptarum-diametrorum quadrata ad Rectangula quæ diximus Minora) erit & reliquus ipſius terminus D in Ellipſeos curvâ. (Nam ſi $d=t$, erit $\frac{l}{t}d^2=\frac{l}{d}d^2=ld$; ideoq; $e^2=ld-\frac{l}{t}d^2=ld-ld=0$. hoc eſt, Ordinatim-applicata evaneſcit, puncto nimirum perimetri cum puncto diametri coincidente.)

Unde patet, Quamlibet Ellipſeos Diametrum binos habere vertices, (ut quæ in binis punctis perimetro occurrit;) quos *Vertices Oppoſitos* appellamus. Diame-

ter

ter verò binis illis verticibus terminata, illa est quam *Diametrum-transversam* jam diximus.

Sed & inde liquet, Ellipsin ex earum curvarum numero esse quæ in se recurrunt, adeóq; figuram comprehendunt.

Ellipseos autem Diameter-intercepta, diametro-transversâ, longior esse non potest; tunc enim $\frac{l}{t}d^2$, quod binorum rectangulorum minus esse supponitur, majus esset quã ld, quod supponnitur eorum majus esse. Si autem tale quid supponeretur; pro Ellipsi, prodiret Hyperbola, eandem habens diametrum-transversam, verticem verò eum qui est assumpto (in Ellipseos diametro-transversa) vertex oppositus; quíq; supponitur Ellipseos diameter intercepta (transversa major) erit aggregatum diametrorum transversæ & interceptæ in Hyperbola. Prout ex Hyperbolæ doctrina, post-tradenda, colligi poterit.

PROP. XXVIII.

Corollaria.

PAtet ex *præmissis*; Cùm sit $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ Horum in Ellipsi quatuor, *Diametri-transversæ*, *Diametri-intercepta*, *Lateris-Recti*, & *Ordinatim-applicatæ*; datis tribus quibusvis, etiam & reliquum (magnitudine) dari. Nempe (disponendo & resolvendo æquationes) erit.

In Ellipsi {
- Ordinatim-applicata, $e = \sqrt{:ld - \frac{l}{t}d^2} : = \sqrt{\frac{td-d^2}{t}l}$.
- Ejusq; quadratum, $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2 = \frac{td-d^2}{t}l$.
- Latus rectum, $l = \frac{e^2}{td-d^2}t$.
- Diameter-transversa, $t = \frac{td-d^2}{e^2}l$.
- Diameter-intercepta, $d = \frac{1}{2}t \pm \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2}$.

Et propterea, Distantia puncti applicationis a Centro, $c = \sqrt{: \frac{1}{4}t^2 \frac{t}{l} e^2}$.

Patet etiam; Ut Diameter-transversa ad Diametrum-interceptam, sic esse Rectangula quæ diximus Majora (diametris interceptis proportionalia) ad Rectangula quæ diximus Minora (earum quadratis proportionalia,) nempe, $t. d :: ld. \frac{l}{t} d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa ad Latus-rectum, sic quadrata Diametrorum-interceptarum ad Rectangula Minora, (quadratis illis proportionalia.) Nempe $t.l :: d^2 : \frac{l}{t} d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa, ad interceptam; sic transversæ residuum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale Quadrato Ordinatim applicatæ. Nempe $t. d :: t - d. \frac{t-d}{t} d = \frac{td-d^2}{t}$. Et $\frac{td-d^2}{t} l = e^2$.

Item; Ut Diameter-transversa, ad Latus-rectum; sic Rectangulum segmentorum transversę, ad Quadratum Ordinatim-applicatę. Nempe $t. l :: td - d^2$. $\frac{td-d^2}{t} l = e^2$.

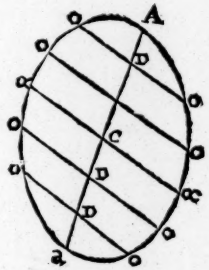
Vel; Ut Rectangulum segmentorum Diametri transversę, ad Quadratum Ordinatim-applicatę; sic esse Diametrum transversam ad Latus-Rectum. (Unde cujuslibet ellipseos Latus-Rectum commodè reperitur.) Nempe $td - d^2. e^2 :: t. l = \frac{e^2}{td - d^2} t$.

Inde sequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum esse Rectangulis segmentorum Diametri-transversę proportionalia. Sunt enim ubiq; ut l ad t.

Adeoq;, Omnium ad eandem Diametrum-applicatarum, eam esse maximam quę diametri-transversę

puncto medio (quod Centrum diximus) applicatur ut C*a*. (Quoniam nempe omnium rectangulorum ejusdem rectæ segmentis comprehensorum, illud maximum est quod bisegmentis comprehenditur; hoc est, quadratum semissis.) Nempe, ubi $d=\frac{1}{2}t=t-d$, erit $td-d^2=\frac{1}{4}t^2$. ideoq; $e^2\left(=\frac{td-d^2}{t}l\right)=\frac{1}{4}tl$, quadratum Ordinatim-applicatæ maximę.

Reliquarum vero Ordinatim-applicatarum quadrata (adeóq; & ipsæ Ordinatim-applicatæ) quæ centro propiùs applicantur sunt remotioribus majora, quæ autem habent applicationum puncta a centro æ-



qualiter remota sunt invicem æqualia. Esto enim distantia puncti applicationis a centro quælibet $CD=c$, ideoq; segmenta diametri-transversæ $\frac{1}{2}t+c$, $\frac{1}{2}t-c$; erit eorum rectangulum $\frac{1}{4}t^2-c^2$ $(=td-d^2;)$ & e^2 $\left(=\frac{td-d^2}{t}l\right)=\frac{\frac{1}{4}t^2-c^2}{t}l$: adeoq; prout quantitas c augetur, ordinatim-applicata minuitur (non quidem proportionaliter, minuitur tamen, ut patet;) & contra; omnium vero maxima quæ centro applicatur (ut dictum est) ubi c evanescit propter coincidentiam punctorum C, D.

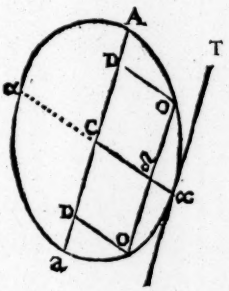
Quodq;

Quodq; de Ordinatim-Applicatis dictum est idem & de Ordinatim-inscriptis (utpote applicatarum duplis) intelligendum est; nempe eam esse maximam quæ per centrum ordinatim-inscribitur; & reliquarum quidem centro propiores remotioribus majores; & æqualiter utrinq; a centro remotas æquales esse.

PROP. XXIX.

De Ellipseos Diametris conjugatis.

REcta Diametro Parallela, ut «T, per illius quæ diametri-transversę puncto medio seu centro Ordinatim-applicatur (quę omnium maxima est, ut ostensum est; estq; ad easdem partes unica, ut patet,) extremitatem ducta; Ellipsin in illo puncto (& quidem solo) contingit. (Secus enim non esset illa omnium, versus easdem partes, Ordinatim-applicatarum maxima.)



Omnes autem, huic contingenti parallelę, (puta O♪O) eidem Ellipsi inscriptę, ab illâ (quam diximus) ordinatim-applicatâ maximâ (ad perimetrum utrinq; continuatâ, ut «C∝) bisecantur; adeoq; & ipsa est (per def.) ejusdem ellipseos diameter: oppositos-vertices habens « ∝.

Cum enim Ordinatim-applicatæ DO DO sint (propter parallelas) æquales, æqualiter distabunt a Centro applicationum puncta D D (ut modo ostensum est) adeoq; bisecantur tam DD in C, quam OO in ♪: (propter parallelas:) estq; «♪ diameter, eiq; ordinatim-applicantur ♪O, CA.

Duas vero hujuſmodi (ejuſdem ellipſeos) diametros, (puta Aa, $\alpha\alpha$) ſibi mutuo ordinatim-poſitas, *Diametros Conjugatas* dicimus, (quę ſe mutuo biſecant in communi centro C;) punctáq; Aα, vel aα, *conjugatos vertices* (in Conjugatis quippe diametris repertos) appellamus.

Ellipſin autem binis Diametris Conjugatis, earumq; quatuor verticibus ſic inſtructam, poſſumus quidem quaſi pro quatuor ſive Ellipſibus ſive Sectionibus habere, quarum quælibet ſuum habet verticem, ſuamq; Diametrum, eíq; Ordinatim-applicatas & Latus-rectum. Quarum quidem quatuor, binas αAα, aαa, *Oppoſitas* dicas, (ut & Aαa, aαA,) quarum nempe vertices ſunt oppoſiti; binas verò αAα, Aαa, vel Aαa, aαa, (quarum vertices ſunt conjugati, utpote in conjugatis diametris poſiti,) *Conjugatas* dicas.

Quamvis enim *Sectionum Oppoſitarum* & *Conjugatarum* nomine, *Hyperbolæ* ut plurimum intelligi ſoleant: nihil tamen impedit quo minùs (ut Hyperbolas, ſic) *Ellipſes* Oppoſitas & Conjugatas dicamus: vel ſaltem (ſi id nominis diſpliceat) Ellipſin dicamus *Oppoſito* & *Conjugato* ſitu conſideratam. Id ſaltem intereſt inter quatuor Sectiones Hyperbolicas, totidemq; Ellipticas, (conjugatis Diametris accommodatas,) quod hæ quidem (productæ) ſe mutuò continuant (adeóq; Ellipſis tota ad quemvis quatuor verticum referri poterit,) illæ autem non ita. Verùm hæc melius fortaſſe percipientur quum deinceps de Hyperbolis Oppoſitis & Conjugatis dictum erit.

Interim notandum eſt, Oppoſitarum ſive Ellipſeon ſive Verticum (perinde enim eſt utrum dicatur,) Diametrum tranſverſam communem eſſe, & quidem Latera-recta æqualia, (vel, ſi mavis, idem; nos enim de lateris-recti ſitu nullam prorſus conſiderationem habemus, ſed ſolummodo de ipſius magnitudine, neq; enim omnino refert vel ubi, vel an omnino ſcribatur aut ſcribi intelligatur,) & quidem eaſdem Ordinatim-applicatas; Diametros-interceptas verò oppoſitas habent, quæ quidem ſimul æquantur diametro-interceptæ.

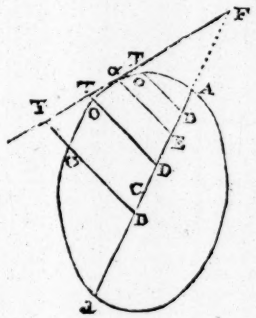
PROP.

PROP. XXX.

De recta Ellipſin-Contingente.

REcta Ellipſin contingens in conjugatarum Diametrorum alterutrius Vertice, cum reliquâ (quantumvis utraq; producatur) nunquam concurret, (utpote quę ipſi parallela eſt, ut modo oſtenſum erat.) Quæ verò Ellipſin contingit recta, alibi quàm in conjugato vertice cum diametro (productâ) concurret quidem. Punctum autem concurſus ſic inquiremus.

Supponatur Tangens αF, occurrens in F, productæ diametro EA, cui ordinatim-applicata ſit Eα. Supponatur etiam ubivis Ordinatim-applicata DO, Tangenti occurrens in T. Sitq; centrum C, & Oppoſiti vertices Aa; quorum ſupponatur A puncto E propior, a remotior.



Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $E\alpha = e$, $EA = t$, $Aa = t$, (ideóq; $Ea = t - d$, $EC = \frac{1}{2}t - d$,) $EF = f$, $ED = a$, (ideoq; $DF = f \pm a$, $DA = d \pm a$, $Da = t - a \mp a$.)

Tum (quia quadrata ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis ſegmentorum Diametri-tranſverſæ proportionalia, ut oſtenſum eſt prop. 28.) erit $EA \times Ea$. $DA \times Da$ :: $E\alpha q$. DOq. hoc eſt, $td - d^2$. $td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da$ :: e^2. $\frac{td - d^2 - a^2 \pm a \mp 2da}{td - d^2} e^2 = DOq$.

Item (propter ſimilia triangula) EF. $E\alpha$ :: DF. DT. hoc

est, $f.e :: f \pm a. \frac{f \pm a}{f} e = DT$ ejúsq; quadratum $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} e^2 = DTq.$

Tum (propter Tangentem) $DTq \gtrless DOq$ (nempe æqualia, si D E puncta coincidant; vel, si secus, illud majus,) hoc est, $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} e^2 \gtrless \frac{td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da}{td - a^2} e^2$. et (utrinq; multiplicando per $\frac{td - d^2}{e^2} f^2$) erit $f^2td - f^2a^2 + tda^2 - d^2a^2 \pm 2ftda \mp 2fda^2 \gtrless f^2td - f^2a^2 - f^2a^2 \pm f^2ta \mp 2f^2da$. Et (deletis utrinq; $f^2td - f^2a^2$, atq; dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda \mp d^2a \pm 2ftd - 2fd^2 \gtrless \mp f^2a \pm f^2t - 2f^2d$.

Deniq;, ponendo D E idem esse punctum, (ut evanescat quantitas $a = ED$, adeoq; & ipsius multiplicia tda, d^2a, f^2a erit $2ftd - 2fd^2 = f^2t - 2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td - d^2 = \frac{1}{2}ft - fd$. (Hoc est, $\square AEa = \square CEF$) vel $\frac{1}{2}t - d.t - d :: d.f$. hoc est, EC. Ea :: EA. EF. vel (alternando) EC. EA :: Ea. EF. Quod erat inquirendum.

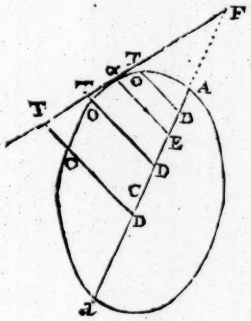
Quod Theorema sic inventum hoc est. Si sit Ordinatim-applicata in ellipsi Eα, atq; ab applicationis puncto E ellipseos diameter per propiorem verticem A continuetur ad F; sitq;, ut distantia puncti-applicationis a Centro EC, ad diametrum interceptam EA, sic residuum transversæ-diametri Ea, ad diametrum interceptam continuatam EF: recta αF Ellipsin in puncto α continget.

Demonstratio (si opus) institui poterit repetitis Analyseos vestigiis.

Sed & hinc concludi potest quod modo aliunde ostensum erat; nempe quod *Recta Ellipsin in diametri vertice contingens diametro conjugatæ parallela est eiq; nunquam occursura.* Nam, cum fit EC. EA :: Ea. EF. si (propter coincidentiam punctorum EC) prima EC nulla sit (sive nullius magnitudinis) quarta EF (vel CF) erit infinita (ex utravis parte supponatur diameter produci, sive per A, sive per a, indifferenter enim se Tangens habet

habet ad utrumq; verticem propter applicationem in centro,) hoc eſt, EF αF nunquam concurrent (propter infinitam diſtantiam ſuppoſiti puncti converſus F) adeoq; ſunt parallelæ.

Patet etiam, *Interceptam-diametrum* EA (inter applicationis punctum & verticem propiorem) *ipſius continuatione* AF (inter verticem illum & tangentis cum diametro concurſum) *minorem eſſe.* Cum enim ſit, EC. Ea = EC + Ca :: EA. EF = EA + AF. Erit etiam (dividendo) EC. Ca :: EA. AF. At EC minor eſt quam Ca vel CA (pars toto) ergo & EA minor quam AF.



Sed & (ponendo $CA = \frac{1}{2}t = s$, & $CE = \frac{1}{2}t - d = c$, ideoq; $EA = d = s - c$, & $Ea = t - d = s + c$) erit $EF = \frac{td - d^2}{\frac{1}{2}t - d} = \frac{s^2 - c^2}{c}$, & $CF\ (= EF + EC) = \frac{s^2}{c}$; hoc eſt CE. CA :: CA. CF.

Sed & hinc docemur *Rectam αF ducere quæ Ellipſin in dato puncto α contingat.* Nempe, ducta Ordinatim-applicata αE, fiat ut EG ad Ea ſic EA ad EF. juncta enim Fα Ellipſin in α contingit.

Item, *A dato extra punctio F rectam ducere Fα quæ Ellipſin contingat.* Nempe, juncta FG, & continuata, (quæ Ellipſi in A α punctis occurrat,) ut habeatur F punctum in diametri Aa continuatione: Quoniam eſt (ut modo dictum eſt) EC. Ca = CA :: EA. AF. ideoq; FA. AC :: AE. EC. Si dividatur AC in E, ſicut dividitur FC in A; & ducatur Ordinatim-applicata Eα; recta Fα juncta Ellipſin contingit.

Alia liceret hîc Corollaria adjungere, qualia de Parabola innuimus prop. 23. Sed ea brevitatis ergo omittenda judico.

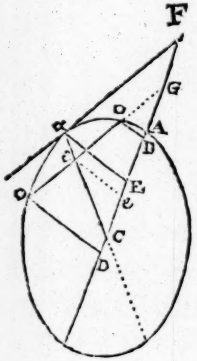
PROP.

PROP. XXXI.

De Ellipseos Diametris.

SI a puncto quovis α in Ellipseos curvâ Aα, ducatur ad Centrum C recta αC; erit hæc ejusdem ellipseos diameter, cujus vertex α, ejúsq; Ordinatim-applicatæ rectæ ipsi αF, ellipsin in puncto α contingenti, parallelæ.

Libet hanc propositionem (ut prius prop. 24.) primo Analytice examinare, deinde & Synthetice demonstrare.



Supponamus igitur rem esse ut perhibetur; adeóq; inscriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam, a recta αC (per contactum & centrum transeunte) bisectam in E. Sintq; rectæ OD, OD, αE, diametro AE ordinatim-applicatæ, adeóq; invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur Ee eidem diametro in e occurrens, quæ propterea (ob parallelas) bisecabit (ut OO in E, sic) DD in e. Deniq; recta OO, diametro AE, (utrisq; si opus est productis,) occurrat in G. (Saltem si parallela sit, ut non possit occurrere; res ipsa jam demonstrata est, Prop. 29.)

Supponemus etiam inpræsentiarum, verticum A a (diametri AE,) verticem A propiorem, a remotiorem, Puncto E: Item punctum E intra puncta α C incidere: rectamq; OO diametro AE productæ extra Ellipsin occurrere: Si autem horum alicui contrarium contingat (quod quidem fieri potest) nihilo tamen minus res succedet, mutatis tantum aliquoties signis + −, quod operationis progressum neutiquam turbabit.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) Ea = e, EA = d,

$= d$, Aa $= t$, Ea $(= t - d_{,}) = x$, EC $(= \frac{1}{2}t - d_{,}) = c$, eD $= q$, $ea = \delta$, $aC = \sigma$, $2\sigma - \delta = \xi$, $eC\,(= \sigma - \delta) = \gamma$.

Tum (per præced.) EC. EA :: Ea. EF. hoc eſt $c.d :: x. \frac{dx}{c} =$ EF. Et (propter parallelas, & ſimilia triangula) Ca. ea :: CE. eE. hoc eſt $\sigma.\delta :: c. \frac{\delta c}{\sigma} =$ eE. Et Ca. Ce :: Ea. eε :: EF. eG. hoc eſt, $\sigma.\gamma :: c. \frac{\gamma c}{\sigma} =$ eε :: $\frac{dx}{c}$. $\frac{\gamma dx}{\sigma c} =$ eG. ideoq; DG $(=$ eG $\pm$ eD$) = \frac{\gamma dx}{\sigma c} \pm q$. Item eA $(=$ eE $+$ EA$) = d + \frac{\delta c}{\sigma}$, & ea $= x - \frac{\delta c}{\sigma} -$ ideoq; DA $(=$ eA $\pm$ eD$) = d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm q$, & Da $= x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp q$. Et rectangulum DA $\times$ Da $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm \sigma^2 xq \mp \sigma^2 dq + 2\sigma\delta cq + \sigma\delta dx - \sigma\delta dc - \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $x - d = 2c$) $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma^2 cq \mp 2\sigma\delta cq + 2\sigma\delta cq + \delta^2 c^2 - \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $\sigma - \delta = \gamma$, & $2\sigma - \delta = \xi$,) $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2}$

Deinde, (quia, propter Ellipſin, Quadrata ordinatim applicatarum ſunt rectangulis ſegmentorum diametri tranſverſæ proportionalia) EA $\times$ Ea $= dx$. DA $\times$ Da :: Eaq $= c^2$. DOq. $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2 dx} e^2$.

Item (propter ſimilia triangula) EF. Ea :: DG. DO. hoc eſt $\frac{dx}{c}$. $e :: \frac{\gamma dx \pm \sigma cq}{\sigma c}$. $\frac{\gamma dx \pm \sigma cq}{\sigma dx} e =$ DO. ejuſque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \mp 2\sigma\gamma dxcq}{\sigma^2 d^2 x^2} c^2 \cdot = DOq = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2 dx} e^2$.

Ideoq; (utrinq; multiplicando per $\sigma^2 d^2 x^2$ & dividendo per c^2) $\gamma^2 d^2 x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq = \sigma^2 d^2 x^2 - \sigma^2 dxq^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq + \delta\xi dxc^2$. Et (delendo utrinq; $\pm 2\sigma\gamma dxcq$, & transponendo) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \sigma^2 d^2 x^2 - \gamma^2 d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2$. Et (quia $\sigma^2 - \gamma^2 = \delta\xi$, per 5 e 2) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \delta\xi d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2$. Et (dividendo utrinq; per $dx + c^2 = \frac{1}{4}$ t2) $\sigma^2 q^2 = \delta\xi dx$. hoc eſt $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2} = q^2$. Conſtat ergo propoſitum.

Illud Synthetice ſic demonſtratur, (repetitis Analyſeos veſtigiis.) Ab Ellipſeos centro C ducatur recta Cα, atq; Ellipſin in puncto α contingat recta αF, diametro cuilibet C A occurrens in F; ipſiq; parallela quælibet O O rectæ Cα (intra Ellipſin) occurrens in ε, diametroq; C A in G; Diametro autem C A ordinatim applicetur αE, eiq; parallela εe, diametro occurrens in e. Eademq; maneant ſymbola quæ prius e, d, t, x, c, δ, σ, ξ, γ.

Sumantur autem in diametro utrinq; a puncto e æquales rectæ eD $= \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atq; ordinatim-ponantur D O, DO, rectæ O O occurrentes in O O. Adeoq; biſecantur tam D D in e (per conſtructionem) quàm O O (propter parallelas) in ε.

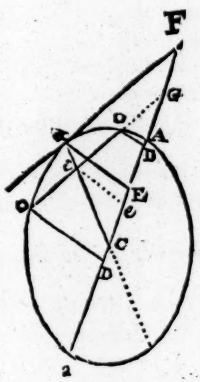
Dico rectam illam quamlibet O O (a rectâ Cα biſectam in ε) Ellipſi inſcriptam eſſe; hoc eſt puncta O O eſſe in perimetro. Quod ſic probatur.

Quoniam ſunt (ut in Analyſi demonſtravimus) $EF = \frac{dx}{c}$, $eG = \frac{\gamma dx}{\sigma c}$, $eA = d + \frac{\delta c}{\sigma}$ & $e\alpha = x - \frac{\delta c}{\sigma}$: Erit DG (= eG $\pm$ eD) $= \frac{\gamma dx}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; & DA $= d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$, & D$\alpha$ $= x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atque horum rectangulum DA$\times$Dα $= \frac{\sigma^2 dx + \delta\xi c^2 - \delta\xi\delta x \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$. (nempe, pro q & q^2 in analyſi, ſubſtituendo $\frac{\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$ & $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}$.) vel (quia $\sigma^2 - \delta\xi =$

γ^2 per 5 e 2) erit DA×Da $= \frac{\gamma^2 dx + \delta\xi^2 + 2\gamma\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$.

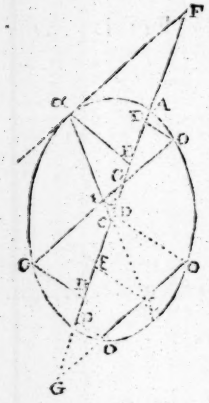
Tum (propter similia triangula) erit E F. Eα :: DG. DO· hoc est, $\frac{dx}{c}$. e :: $\frac{\gamma dx + c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma c}$. $\frac{\gamma dx + c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma dx}$ e = DO. ejúsq; quadratum $\frac{\gamma^2 d^2x^2 + \delta\xi dx\, c^2 + 2\gamma dx c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2\mu^2x^2}$ $e^2 =$ $\frac{\gamma^2 dx + \delta\xi^2 + 2\gamma c\sqrt{\delta\xi\delta x}}{\sigma^2\mu x}$ = DOq.

Sed & tantundem est quadratum Ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Ellipsin) ut rectangulum EA × Ea, ad rectangulum DA×Da; sic (Eαq) quadratum Ordinatim-applicatæ in E, ad quadratum ordinatim-applicatæ in puncto D. hoc est $dx \frac{\gamma^2 x + \delta\xi^2 + 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2} :: e^2 . \frac{\gamma^2 dx + \delta\xi^2 + 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 dx} c^2$. quod igitur est quadratum ordinatim-applicatæ puncto D, estq; (ut modò ostensum est) ipsum DOq.



Et propterea DO, DO, (quæ, ex constructione, sunt punctis D D Ordinatim-positæ) & Ordinatim-applicatis æqualia, adeoq; puncta O O, sunt in perimetro; rectaq; OO est Ellipsi inscripta: sed & illa (eiq; parallelæ, eâdem ratione,) a rectâ αC bisecatur, adeóq; ordinatim-inscripta est, ejúsq; semissis εO diametro αC ordinatim-applicata. Quod erat demonstrandum.

Notandum autem est (tam quoad Analysin quam Synthesin) fieri quandoque posse (ubi recta OO longius abest a tan-



gente αF) ut punctum G vel intra Ellipſin accidat vel etiam ultra oppoſitum verticem: Sed nihil hinc continget quod operationis progreſſum multum perturbet; tantùm mutanda forſan erunt aliquoties ſigna † —, aut aliquæ ſaltem quantitates occurrent negativè interpretandæ. Sed hoc non tanti eſt, ut ea propter operationem iſtis caſibus accommodandam repetam. Illud autem a quovis vel parum exercitato (ſicui id operæ prætium videbitur) facile præſtari poſſit.

Interim non erit incommodum Corollaria quædam hic ſubjungere, (qualia ſubjunximus Prop. 14. de Parabola,) puta,

Quodlibet Perimetri Ellipſeos punctum alicujus diametri verticem eſſe.

Adeoq; , *In quâlibet Ellipſi infinitos eſſe vertices, atq; Diametros infinitas.*

Item, *Ellipſeos diametros omnes in Centro convenire.*

Et, *Rectam quamlibet per centrum tranſeuntem, Diametrum eſſe.*

Item, *Quamlibet in eodem plano rectam per aliquod intra Ellipſin punctum tranſeuntem alicui diametro Ordinatim-poſitam eſſe.*

Item, *Quæ diametro alicui in vertice occurrit, ipſius Ordinatim-applicatis parallela, Ellipſin in illo puncto contingere.*

Et, *Quæ Ellipſin contingit, rectam diametro per contactus punctum tranſeunti Ordinatim-poſitam eſſe, ejuſq; Ordinatim-applicatis parallelam.*

Deniq; ; *Ellipſin, quæ diametros conjugatas æquales atq; ad angulos rectos poſitas habet, Circulum eſſe.*

Hæc autem, aliaq; innumera, vel ſatis in præcedentibus demonſtrantur, vel inde ſaltem facile demonſtrari poterunt.

PROP.

PROP. XXXII.

Effectiones Geometricæ.

ATq; ex dictis satis intelligere licet Geometricam Problematum effectionem. Puta,

Ellipseos Diametrum invenire. Quæ enim duas quaslibet inscriptas parallelas bisecat est diameter.

Ellipseos Centrum invenire. Nempe in duarum quarumlibet diametrorum concursu.

Ellipseos diametrum invenire, quæ per datum punctum transeat. Rectam nempe, quæ datum punctum & centrum conjungit.

Datâ in Ellipsi diametro quâlibet, diametrum conjugatam invenire. Vel generaliter.

Datâ inscripta quâlibet, diametrum invenire cui illa ordinatim ponitur. Nempe rectam quæ datam inscriptam aliámq; ipsi parallelam bisecat: Vel (si diameter non sit) quæ ipsius punctum medium, & Ellipseos centrum conjungit.

Datæ Ellipseos Axes invenire. Nempe describatur Peripheria Ellipsi concentrica, ipsamq; saltem in binis punctis secans: Rectam enim bina puncta proxima conjungentem quæ bisecat recta, est Axium alter; reliquusq; est huic conjugatus.

Nota tamen; *In circulo omnes Diametros Axes esse, & quidem æquales; & conjugatas ipsius diametros omnes esse conjugatos Axes. In aliis autem Ellipsibus quibuscunq, non nisi duos Axes reperiri, eosq; Conjugatos, sed & inæquales; & quidem conjugatarum diametrorum omnium maximè inæquales; quare &* Diametri-Extremæ *dici solent: Sicut è contra,* Diametros-Medias *dicere licet, quæ sunt conjugatæ æquales.*

Datæ Ellipseos ordinatim-applicatas (positione) invenire, quæ datæ ipsius diametro conveniunt. Inventa nempe Diametro conjugata, quæ huic æquidistant rectæ sunt diametro datæ ordinatim-positæ.

Ellipsin ad datam diametrum & datum latus rectum describere, quæ datum habeat inclinationis angulum. Nempe inventis (magnitudine) ad quotlibet diametri puncta Ordinatim-applicatis, (per prop. 28.) applicentur ad sua respectivè puncta in angulo imperato

rato: Per earum enim extrema puncta, curva æquabiliter ducta, est Ellipsis.

Atqui ego brevitatis causâ (præsertim cum ex dictis facilè deduci queant) harum effectionum demonstrationes, aliáq; tam Problemata quàm Theoremata plurima lubens omitto

PROP. XXXIII.

De Hyperbolâ absolutè considerata.

CUm sit in Hyperbolâ (ut ostendimus Prop. 20. inspecto Cono) Quadratum ordinatim-applicatæ $h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$. Licebit hic (ut Parabolam & Ellipsin supra) Hyperbolam eo charactere insignitam, Cono eximere, atq; absolutè & universaliter contemplari, acsi nullam ad Conum relationem habeat.

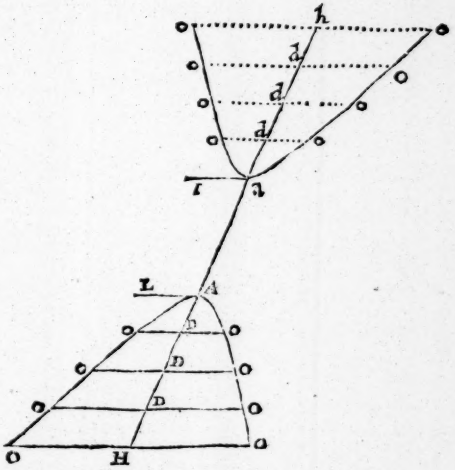
Hyperbolam igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam ejusmodi curvâ terminatam) cujus ordinatim-applicatarum singularum quadrata æquantur aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera sunt interceptis-diametris, altera earum quadratis proportionalia. (Nempe $h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$. Sunt enim rectangula ld ipsis d diametris-interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l; rectangula vero $\frac{l}{t} d^2$ diametrorum-interceptarum quadratis d^2 sunt proportionalia, propter eandē ubiq; rationem, puta $t. l :: d^2. \frac{l}{t} d^2$ Utrum verò rectangulorum majus sit, non refert; sed modo hoc, modò illud)

Diametrum, Diametros-interceptas, Verticem, Ordinatim-positas, Ordinatim-inscriptas, Ordinatim-applicatas

catas, atq; *Punctum-applicationis*; eodem ſenſu hîc accipio quo iiſdem ſuprà de Parabola & Ellipſi uſus ſum.

Rectam nota *l* inſignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis diametris binórum rectangulorum illa continet quæ ſunt ipſis diametris-interceptis proportionalia) appello *Latus-Rectum*.

Rectam verò alteram, quæ notâ *t* deſignatur, (quam quidem ſupponimus Diametri ſupra verticem continuationem, verſus convexam curvæ partem ductam;



quæq; ita ſe habet ad Latus-rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad binorum Rectangulorum illa quæ quadratis illis ſunt proportionalia:) *Diametrum-tranſverſam* appello, (ut quæ Oppoſitis Oppoſitarum Hyperbolarum vertices conjungit, ut poſt dicetur;) ejuſq; punctum medium (quod quidem extra Hyperbolam

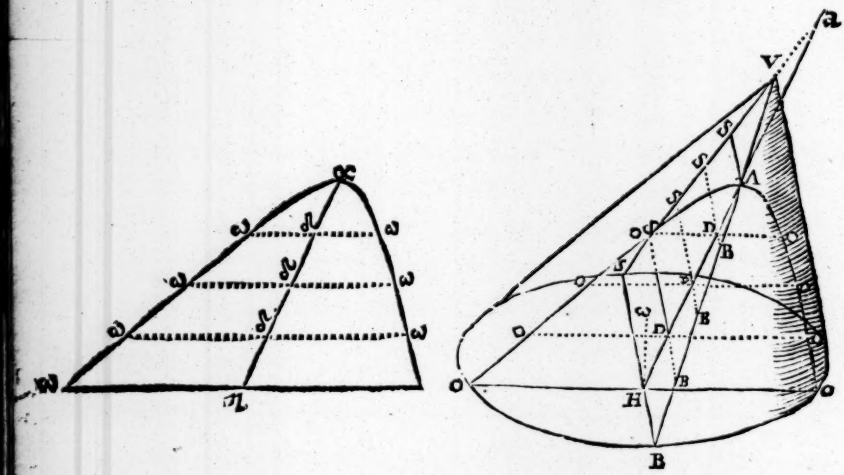
Hyperbolam jacet, ſed inter Hyperbolas Oppoſitas, ut deinceps patebit) appello *Centrum*.

Hyperbolam a nobis definitam eandem eſſe cum illa quam definit Apollonius, ſimili fere progreſſu oſtendemus, atq; ſupra de Parabolâ & Ellipſi uſi ſumus prop. 21, & 26.

Hyperbolæ nempe, (qualem definit Apollonius Conic. lib. 1. prop 12.) Sectione coni factæ, univerſaliter convenire definitionem a nobis propoſitam; jam probatum eſt prop. 17, & 20.

Contra vero, Hyperbolam a nobis deſcriptam ita Cono aptari poſſe, ut eas habeat conditiones quas poſtulat Hyperbola Apolloniana, ſic probatur.

Exponatur Hyperbola quælibet a nobis definita a ω, cujus



Ordinatim-applicatarum quadrata ſint $h^2 = lx + \frac{l}{t}x^2$. Dico hanc Cono ita ut poſtulatur aptari poſſe.

Ducatur

Ducatur recta aA=*l*, & (in ejuſdem continuatione) AH =*d*: Atq; ad rectam AH ponantur (ad oppoſitas partes) duæ rectæ invicem parallelæ; AS=*l*, & HI=*d*, (ſaltem tantæ ſint longitudinis AS, HB, ut ſit AS × HB=*ld*;) Sitq; angulus SAH =AHB quilibet acutus, (modo major ſit complemento anguli inclinationis in Hyperbola expoſita.) Juncta verò aS producatur ut cum recta BH producta coeat in S; & juncta BA producatur ut occurrat ipſi aS in V; ut compleatur triangulum VBS; quod eſto Triangulum per axem in Cono conſtruendo.

Deinde rectis AH. BHS, duo plana ita erigantur, ut communis eorum ſectio HO, faciat ad rectam HB angulos rectos, ad rectam vero AH angulum AHO æqualem angulo inclinationis in Hyperbola propoſita.

Hoc enim omnino fieri poſſe conſtat: Si enim recta quælibet HO perpendiculariter inſiſtens plano Trianguli VBS (adeóq; angulos faciens utroſq; OHA, OHB, rectos) circumvolvatur circa rectam BHS ut axem (invariato angulo OHB) donec ad ſitum plani perveniat in Hω, faciatq; in plano trianguli angulum ωHA acutum, qui minor erit angulo inclinationis in Hyperbola, (eſt enim, ex conſtructione, angulus AHB iſtius inclinationis complemento major;) neceſſe eſt enim ut, in tranſitu, aliquando fecerit angulum inclinationis angulo æqualem; (factus enim eſt tranſitus ab angulo recto, adeóq; debito majori, vel ſaltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoq; tunc fuerit in ſitu debito ut ſit duorum planorum prout requiritur concurrentium communis ſectio.

In plano autem BOS ſic poſito ſcribi intelligatur circulus, diametrum habens BHS, qui ſit baſis coni; aliiq; huic paralleli diametros habentes BDS, conum complentes, (per prop. 5.) qui plano AHO ſectus exhibebit Hyperbolam (per prop. 7.) cujus Ordinatim-applicatæ omnes (quarum HO eſt una) ad diametrum AH angulum facient æqualem angulo inclinationis ordinatim-applicatarum in Hyperbolâ expoſita ad diatrum ſuam; ſed & eiſdem ſunt reſpectivè æquales, ut patebit ex demonſtratione prop. 17, & 20.) ideoq; ſingulæ ſingulis congruunt, adeóq; & Hyperbola expoſita Hyperbolæ ſectione coni factæ. Quod erat faciendum. Adeóq; Hyperbola a nobis

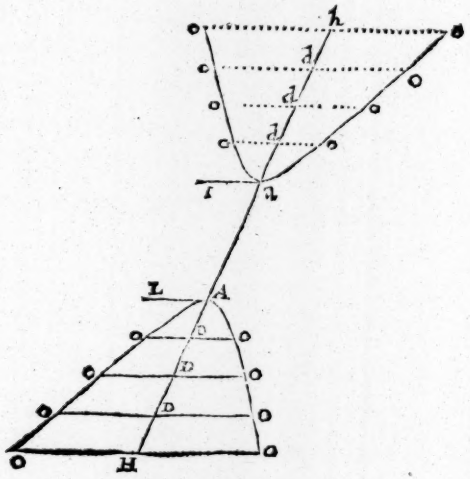
definita eadem est cum ea quam definit Apollonius. Quod erat demonstrandum.

Sed & eâdem opera docuimus *Conum construere eiq; datam Hyperbolam ita aptare, ut data ipsius diameter sit diameter-ex-generatione:* Atq; etiam Theorematice verum esse, *Hyperbolæ diametrum quamlibet fieri posse, in aliquo saltem Cono, Diametrum-ex-generatione.*

PROP. XXXIV.

De Diametro transversa, & Hyperbolis oppositis.

SI ad eandem diametrum duæ Hyperbolæ opposito situ ponantur, communem habentes diametrum-transversam, idemq; latus rectum; sintq; ad illam diametrum ordinatim-applicatæ unius, ordi-



natim-applicatis alterius parallelæ: dicentur illæ *Hyperbolæ-oppositæ*; earumq; vertices, eandem diametrum-

trum-transversam terminantes, *Vertices Oppositi*: Punctumq; inter oppositos vertices medium, est utriq; Hyperbolæ centrum commune.

Hæ autem Hyperbolæ Oppositæ, respondent Hyperbolis Oppositorum conorum eodem plano sectorum.

PROP. XXXV.

Corollaria.

Patet ex dictis; Cùm sit $h^2 = ld + \frac{l}{t} d$: Horum in Hyperbola quatuor, *Diametro-transversâ*, *Diametro-intercepta*, *Latere-recto*, & *Ordinatim-applicatis*; Datis tribus quibusvis, etiam reliquum (magnitudine) datur. Nempe (disponendo & resolvendo æquationes) erit

In Hyperbola,

- Ordinatim-applicata, $h = \sqrt{: ld + \frac{l}{t} d^2 :} = \sqrt{\frac{td + d^2}{t}} l$.
- Ejusq; quadratum, $h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2 = \frac{td + d^2}{t} l$.
- Latus-Rectum, $l = \frac{h^2}{td + d^2} t$.
- Diameter-transversa, $t = \frac{td + d^2}{h^2} l$.
- Diameter-intercepta, $d = \sqrt{: \frac{1}{4} t^2 + \frac{t}{l} h^2 :} - \frac{1}{2} t$.

Adeoq; Diametrorum transversæ & interceptæ aggregatum, $t + d = \sqrt{: \frac{1}{4} t^2 + \frac{t}{l} h^2 :} + \frac{1}{2} t$.

Distantia puncti applicationis a centro. $c = \sqrt{: \frac{1}{4} t^2 + \frac{t}{l} h^2}$.

Patet etiam; Ut Diameter-tranſverſa, ad interceptam; ſic eſſe binorum Rectangulorum ea quæ diametris interceptis proportionalia, ad Rectangula earum quadratis proportionalia. Nempe $t.d::ld.\frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-tranſverſa, ad Latus-rectum; ita quadrata diametrorum-interceptarum, ad Rectangula quadratis illis proportionalia. Nempe $t.l::d^2.\frac{l}{t}d^2$.

Item, Ut Diameter tranſverſa, ad interceptam; ita utriuſq; aggregatum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale quadrato ordinatim-applicatæ. Nempe $t.d::t+d.\frac{t+d}{t}d=\frac{td+d^2}{t}$. Et $\frac{td+d^2}{t}l=b^2=ld+\frac{l}{t}d^2$.

Adeoq; Ut Diameter-tranſverſa, ad Latus-rectum; ſic Rectangulum ſub Diametro-interceptâ & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ, ad quadratum Ordinatim-applicatæ. Nempe $t.l::td+d^2.\frac{td+d^2}{t}l=b^2=ld+\frac{l}{t}d^2$.

Vel, Ut Rectangulum Diametro interceptâ, & aggregato Diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſum, ad quadratum Ordinatim-applicatæ: ſic eſſe Diametrum-tranſverſam ad Latus-rectum. (Unde Hyperbolæ Latus-rectum commodè reperitur.) Nempe, $td+d^2.b^2::t.l=\frac{b^2}{td+d^2}t$.

Inde ſequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum, Rectangulis Diametro interceptâ & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſis, eſſe proportionalia. Sunt enim ubiq; ut t ad l.

Adeoq; Prout longius a vertice removetur punctum-applicationis, ita ſemper augeri Ordinatim-applicatas

plicatas. Nempe quia ſic tam d quam $t+d$ (diameter intercepta, & aggregatum tranſverſæ & interceptæ) augentur, adeoq; & eorum rectangula, & propterea quadrata Ordinatim-applicatarum his rectangulis proportionalia, adeóq; & ipſæ Ordinatim-applicatę.

Et propterea; Hyperbolam ex earum linearum numero eſſe, quæ figuram non claudunt; Cum Ordinatim-applicatę (a vertice inchoando) perpetuo creſcant, adeoq; & creſcat crurum divaricatio, quę idcirco nunquam ſunt deinceps coitura.

Ideoq; & Hyperbolę diametrum quamlibet non niſi in unico Verticis puncto eidem Hyperbolę occurrere; Quoniam nempe creſcentibus continuò Ordinatim-applicatis Hyperbolę curva a diametro magis continuò reſiliat, nunquam ideo deinceps coitura. Vertices enim Oppoſiti, quanquam in eâdem diametro, non tamen ſunt in eâdem Hyperbolâ, ſed in Oppoſitis.

PROP. XXXVI.

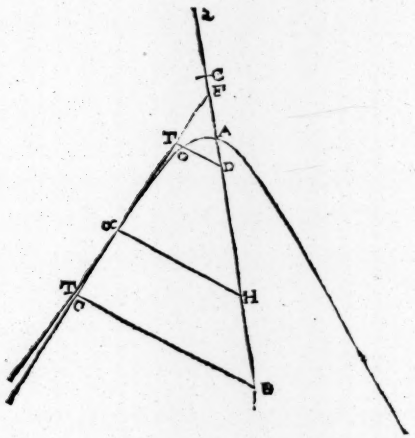
De recta Hyperbolam contingente.

REcta Hyperbolam contingens diametro productæ inter verticem & centrum occurret. Punctum vero concurſus ſic inquiremus.

Suppoſitur tangens αF occurrens, in F, diametro HA productæ, eiq; ordinatim-applicata αH. Supponatur etiam ubivis eidem diametro Ordinatim-applicata DO, tangenti Occurrens in T. Sitq; A vertex, C centrum.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $H\alpha = b$, $HA = d$, $A\alpha = t$, (ideoq; $H\alpha = t+d$, $HC = \frac{1}{2}t+d$,) $HF = f$, $HD = e$, (ideoq; $DF = f \pm e$, $DA = d \pm e$, $D\alpha = t+d \pm e$.)

Tum (quia, propter Hyperbolam, quadrata Ordinatim applicatarum sunt rectangulis AHa proportionalia, ut modo ostensum est) erit HA×Ha. DA×Da :: Hαq. DOq. hoc est, $td+u^2$. $td+d^2+a^2 \pm ta \pm 2da :: b^2$. $\frac{td+a^2+a^2 \pm ta \pm 2da}{td+u^2} b^2$ =



Et (propter similia triangula) HF. Hα :: DF. DT. hoc est $f. b :: f \pm a. \frac{f \pm a}{f} b$ = DT. ejusq; quadratum $\frac{f^2+a^2 \pm 2fa}{f^2} b^2$ = DTq.

Tum (propter tangentem) DTq ≷ DOq (nempe æqualia h D H coincidant; vel, si secus, illud majus;) hoc est, $\frac{f^2+a^2 \pm 2fa}{f^2} b^2 \gtrless \frac{td+u^2+a^2 \pm ta \pm 2da}{td+u^2} b^2$. & (utrinq; multiplicando per $\frac{td+u^2}{b^2} f^2$) erit $f^2td+f^2u^2+tda^2+du^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fu^2a \gtrless f^2td+f^2u^2+f^2a^2 \pm f^2ta \pm 2f^2da$. Et (deletis utrinq; $f^2td+f^2u^2$) erit $tda^2+u^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fu^2a \gtrless f^2a^2+f^2ta \pm 2f^2da$. Et (dividendo per $\pm a$) erit $\mp tda \mp u^2a+2ftu \mp 2fu^2 \gtrless \pm f^2a+f^2 \mp f^2d$.

Deniq;, ponendo D H idem esse punctum (ut evanescat quantitas

quantitas a, adeoq; & ipsius multiplicia tda, d^2a, f^2a) erit $2ftd + 2fd^2 = f^2t + 2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td + d^2 = \frac{1}{2}ft + fd$: (hoc est □ AHa = □ C H F;) vel $\frac{1}{2}t + d.\ t + d :: d.\ f = \frac{t+d}{\frac{1}{2}t+d}\,d$. Hoc est HC. Ha :: HA. AF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema sic inventum, hoc est; Si sit ordinatim-applicata in Hyperbola Hα, atq; ab applicationis puncto H continuetur diameter H A ad F; sitq; ut distantia puncti-applicationis a Centro H C, ad aggregatum diametrorum transversę & interceptę H a; sic diameter intercepta H A, ad eandem continuatam H F. recta αF juncta Hyperbolam in puncto α continget.

Vel sic; si recta αF Hyperbolam contingat in termino ordinatim-applicatæ α; erit, ut distantia puncti applicationis H a centro H C, ad ejusdem distantiam a vertice remotiore H a; sic distantia a vertice propiori H A, ad distantiam a puncto concursus tangentis & diametri H F.

Demonstratio, si sit opus, institui poterit repetitis Analyseos vestigiis.

Sed & patet, quod cùm sit HC. Ha :: HA. HF. hoc est HC. HC+Ca :: HA. HA + AF. erit (dividendo) HC. Ca = CA :: HA. AF. Adeoq; si sumatur (in diametro continuata) A F = $\frac{HA \times AC}{HC}$, habetur punctum F. Sed etiam, cùm sit HC major quam CA, (pars toto) erit propterea HA major quam AF; hoc est. *Diameter intercepta, major quam ipsius continuatio ad concursum Tangentis*; (contra quam in Ellipsi ubi minor est; et in Parabolâ, ubi æqualis ut ostendimus prop 23 & 30.)

Item, (ponendo CA = $\frac{1}{2}t = s$, & CH = CA + AH = $s + d = c$, ideoq; HA = $c - s$, & Ha = $c + s$) erit HF = $\frac{td + d^2}{\frac{1}{2}t + d} = \frac{c^2 - s^2}{c}$ $= f$, & CF = $c - f = \frac{s^2}{c}$. Hoc est CH. CA :: CA. CF.

Atq;

Atq; hinc docemur, *Rectam a F ducere quæ Hyperbolam in dato puncto a contingat.* Sumpta nempe $CF = \frac{CA\,q}{CH}$, & quidem a C versus A, si contactus requiratur ad Hyperbolam A a, vel (eâdem ratione) a C versus a, si ad Hyperbolam oppositam.

Atq; hinc sequitur; *Rectam contingentem Hyperbolæ diametro citra centrum occurrere; puta intra centrum & verticem:* (nam quod ultra verticem sit, patet ex prædictis, cum sit HC. Ha : : HA. HF. est enim HC minor quam Ha, ideoq; & HA minor quam HF: Quòd autem sit citra centrum, patet etiam, quia, ut dictum est, HC. CA : : HA. AF, adeoq; HC. HA : : AC. AF. at HC major est quam HA, ergo AC major quam AF.)

Item, *A quovis diametri puncto F, inter Hyperbolæ verticem & centrum sumpto, duci posse rectam Fa, quæ Hyperbolam contingat.* Quo autem punctum F puncto C propius sit, eo remotius abest & punctum contactus a, & punctum applicationis huic conveniens H. Quia ut CF. CA : : CA. CH.

Adeoq; si supponamus punctum F ipsi C coincidere, ut distantia CF = 0 nulla sit; erit propterea CH infinita; *Hoc est*, punctum H, (adeoq; & punctum a) supponendum est infinitè distare, adeoq; vel nusquam vel non nisi in Hypberola actu infinitâ reperiri.

Cumq; punctum C indifferenter se habeat ad utramq; Hyperbolarum oppositarum; ea quæ supponitur Contingens per centrum ducenda, versus utramvis partem producatur, infinita erit, adeóq; Hyperbolarum illarum neutri occurret. Quæ propterea *Asymptota* dici solet, ut post dicetur.

Alia quæ adjungi possent corollaria lubens omitto.

PROP. XXXVII.

De Hyperbolæ Diametris.

SI per Hyperbolę Centrum C, punctúmq; in curvâ quodlibet a, transeat C a recta; erit illa ejusdem Hyperbolę diameter, verticem habens a, atq;

atq; ordinatim-applicatas rectę αF hyperbolam in α contingenti parallelas.

Libet propositionem (ut prius 24 & 31.) Analytice examinare, deinde & Synthetice demonstrare.

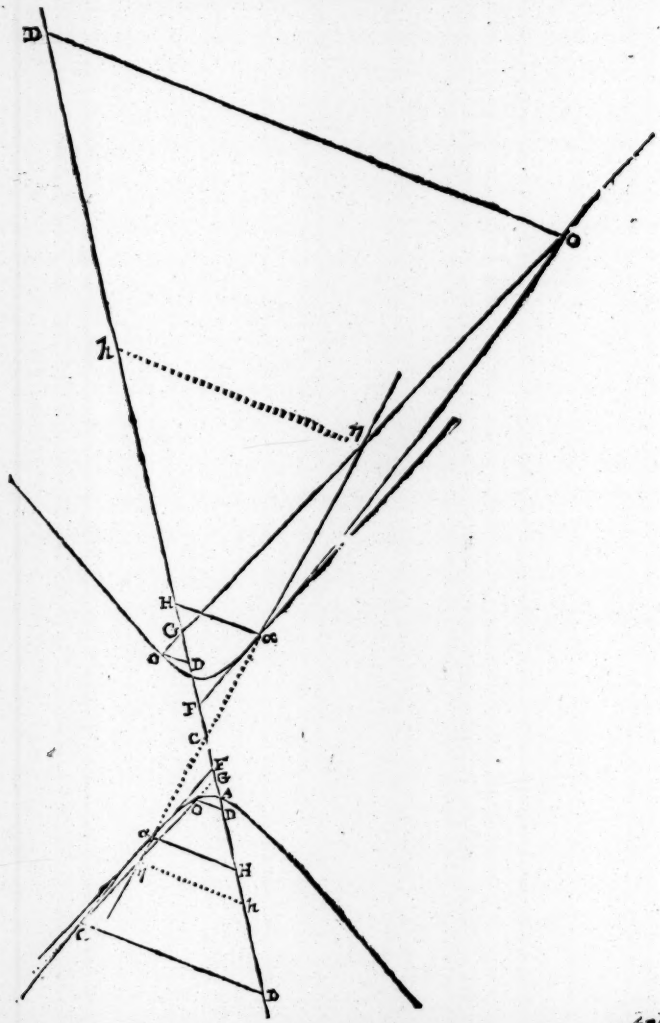
Supponamus igitur rem esse ut perhibetur, adeoq; inscriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam a rectâ $C\alpha$ (per centrum & contactum transeunte) bisectam in ν. Sintq; rectæ OD, OD, αH, diametro HA ordinatim-applicatæ, & propterea invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur νh eidem diametro in h occurrens; quæ propterea (propter parallelas) bisecabit, (ut OO in ν, sic) DD in h. Deniq; recta OO (producta si opus) diametro HA occurrat in G: Occursuram enim omnino esse patet, quoniam αF ipsi parallela eidem diametro occurrit, per præced.

Supponemus etiam impræsentiarum, occursus punctum G contingere supra verticem A, extra Hyperbolam. Si autem secus contingat, (uti fieri potest, si inscripta OO remotius a tangente sumatur, ita ut diametrum transeat,) non tamen series operationis variabitur aliter quam vel mutanda aliquando signa $+$ $-$, vel quantitatem aliquando negativè interpretandam fore, adeoq; ex parte suppositioni contrariâ, intelligendam.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $H\alpha = b$, $HA = d$, $A\alpha = t$, $Ha\ (= t+d) = z$, $HC\ (= \frac{1}{2}z+d) = c$, $hD = q$, $\alpha\nu = \delta$, $\alpha C = \sigma$, $\nu C\ (= \sigma+\delta) = \gamma$, $2\sigma+\delta = \zeta$.

Tum (per præced.) HC. Ha :: HA. HF. hoc est $c.z :: d.\frac{dz}{c} = HF$. Et (propter parallelas & similia triangula) $C\alpha.\alpha\nu :: CH.Hh$. hoc est $\sigma.\delta :: c.\frac{\delta c}{\sigma} = Hh$. Et $C\alpha$ $C\nu :: H\alpha.h\nu :: HF.hG$. hoc est $\sigma.\gamma :: b.\frac{\gamma b}{\sigma} = h\nu :: \frac{dz}{c}.\frac{\gamma dz}{\sigma c} = hG$. ideoq; $DG\ (= hG \pm hD) = \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm q$. Item $hA\ (= AH + Hh) = u + \frac{\delta c}{\sigma}$, & $ha\ (= t+d+\frac{\delta c}{\sigma}) = z+\frac{\delta c}{\sigma}$. ideóq; $DA = u+\frac{\delta c}{\sigma} \pm q$, &

$Da = x + \frac{fx}{e} \pm q$. Et rectangulum $DA \cdot Da =$



fzdz

$\frac{\sigma^2 lz+\sigma^2 q^2 \pm \sigma^2 zq \pm \sigma^2 dq \pm \sigma\delta cq+\sigma\delta zc+\sigma\delta dc+u^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $z+d=2c$) $=\frac{\sigma^2 lz+\sigma^2 c^2 \pm 2\sigma^2 cq \pm 2\sigma\delta cq+\sigma\delta c^2+\delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $\sigma+\delta=\gamma$, & $2\sigma+\delta=\xi$) $=\frac{\sigma^2 dz+\sigma^2 q^2+2\sigma\gamma cq+\delta\zeta c^2}{\sigma^2}=$ DA×Da.

Deinde (quia propter Hyperbolam, Quadrata Ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis diametro interceptæ & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſis proportionalia) erit HA×Ha $=dz$. DA×Da :: Hα $=b^2$. DOq $=\frac{\sigma^2 dz+\sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq+\delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Item (propter ſimilia Triangula) HF, Hα :: DG.DO. hoc eſt $\frac{dz}{c}$. b :: $\frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma c}$. $\frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma dz} b=$ DO. ejuſque quadratum. $\frac{\gamma^2 u^2 z^2+\sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq}{\sigma^2 u^2 z^2} b^2 =$ DOq $=\frac{\sigma^2 dz+\sigma^2 q^2+2\sigma\gamma cq+\delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Ideóq; (utrinq; multiplicando per $\sigma^2 u^2 z^2$ & dividendo per b^2) $\gamma^2 u^2 z^2+\sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq=\sigma^2 u^2 z^2+\sigma^2 dzq^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq+\delta\zeta dzc^2$. Et (delendo utrinq; $\pm 2\sigma\gamma dzcq$, atq; tranſponendo) $\sigma^2 c^2 q^2-\sigma^2 dzq^2=\delta\zeta dzc^2-\gamma^2 u^2 z^2+\sigma^2 u^2 z^2$. Et (quia $\gamma^2-\sigma^2=\delta\zeta$, per 6 e 2,) $\sigma^2 c^2 q^2-\sigma^2 dzq^2=\delta\zeta dzc^2-\delta\zeta u^2 z^2$. Et (dividendo utrinq; per $c^2-dz=\frac{1}{4}l^2$) erit $\sigma^2 q^2=\delta\zeta dz$. hoc eſt $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}=q^2$. Conſtat ergo propoſitum.

Illud Synthetice ſic demonſtratur. (repetitis Analyſeos veſtigiis) A centro C ducatur ad Hyperbolam Cα. Atq; in puncto α Hyperbolam contingat αF, diametro cuilibet HA occurrens in F; ipſiq; parallela quælibet OO, eidem diametro HA occurrens in G, & rectæ Cα (productæ) in n. Diametro autem HA ordinatim-applicetur αH, eiq; parallela nh eidem diametro occurrat in h. Eademq; quæ prius maneant ſymbola $b, d, l, z, c, \delta, \sigma, \gamma, \zeta$.

Sumantur autem in diametro utrinq; a puncto h æquales rectæ $hD = \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$. atq; ordinatim ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in O O. Adeoq; bisecantur tam DD in h (per constructionem) quam O O (propter parallelas) in *n*.

Dico rectam OO (a recta C*n* bisectam in *n*) Hyperbolæ inscriptam esse; hoc est, puncta O O esse in ipsa Hyperbolæ curva. Quod sic probatur.

Quoniam sunt (ut in Analysi demonstravimus) $HF = \frac{dz}{c}$ $hG = \frac{\gamma dz}{\sigma c}$, $hA = d + \frac{dc}{\sigma}$, & $ha = z + \frac{dc}{\sigma}$. Erit DG (= hG ± hD) $= \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$; item DA (= hA ± hD) $= d + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, Da $= z + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, & rectangulum DA×Da $= \frac{\sigma^2 dz^2 + \delta\zeta dz^2 + \delta\zeta dz \pm 2\gamma dz\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2}$ (nempe pro q^2 & q in analysi, substituendo in synthesi $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}$ & $\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$.) vel (quia $\sigma^2 + \delta\zeta = \gamma^2$ per 6 e 2) $\frac{\gamma^2 dz^2 + \delta\zeta dz^2 \pm 2\gamma dz\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2} =$ DA× DA.

Tum (propter similia triangula) erit HF. Hα :: DG. DO. hoc est, $\frac{dz}{c} . b :: \frac{\gamma dz}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}} . \frac{\gamma dz \pm c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma dz} b =$ DO. ejusq; quadratum $\frac{\gamma^2 dz^2 z^2 + \delta\zeta dz z^2 \pm 2\gamma dz z\sqrt{d\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz^2} b^2$ $=$ DOq $= \frac{\gamma^2 z^2 + \delta\zeta z^2 + 2\gamma z\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz} b^2$.

Sed & tantundem est quadratum ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Hyperbolam) ut rectangulum HA×Ha, ad rectangulum DA × Da; sic Hαq quadratum ordinatim-applicatæ puncto H, ad quartum, quod erit quadratum ordinatim

tim-applicatæ puncto D. hoc est, $dz.\frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta^2 + 2\gamma\zeta\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2}$ $:: h^2 . \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta^2 + 2\gamma\zeta\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz} h^2$. quod æquale est ipsi DOq, ut modo ostendimus.

Et propterea DO, DO, (quæ, ex constructione, sicut punctis D D ordinatim positæ,) sunt & ordinatim-applicatis æquales, adeóq; puncta O O sunt in Hyperbolæ curvâ, rectaq; OO est Hyperbolæ inscripta. Sed & illa (eiq; parallelæ, eâdem ratione,) a recta Cαn bisecatur; adeóq; ordinatim-inscripta est, ejúsq semissis nO diametro Cαn Ordinatim-applicata. Quod erat demonstrandum.

Notandum autem est (quod & prius monui) fieri quidem posse ut inscripta OO diametrum transeat in G intra parabolam. Quod tamen operationis progressum non aliter immutabit quam variando nonnunquam signa + — aut quantitatem negativè interpretandam exhibendo. Ut experienti patebit.

Recta autem illa αC quam Hyperbolæ Diametrum esse ostendimus, iisdem oppositis-Hyperbolis convenit quibus & AC; ipsaq; αC duplicata erit earundem Diameter-transversa. Sumatur enim in opposita Hyperbola ad=AH, hoc est Cd=CH, & ordinatim-applicetur (situ contrario) d o, quæ erit ipsi Hα æqualis & parallela (propter æquales diametros interceptas, eandam transversam, idem latus-rectum, atq; situm parallelum, per prop. 34.) adeóq; anguli alterni æquales, nempe Cdo=CDα: & propterea (juncta oC) triangula CDα, Cdo, similia & æqualia; ideóq; (propter angulos κατὰ κορυφὴν ad C æquales) erit αCo una recta; atq; illa quidem in C bisecta: quæ igitur cùm ad Oppositas Hyperbolas terminetur, erit illarum transversa-diameter, ejúsq; medium punctum C earundem centrum.

Unde etiam liquet, *Hyperbolæ Diametros omnes in eodem communi centro convenire.*

Sed & ea omnia Corollaria (ultimo excepto) quæ ad prop. 31. de Ellipsi memorantur, iisdem fere verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Ut non sit opus ea repetere.

PROP.

PROP. XXXVIII.

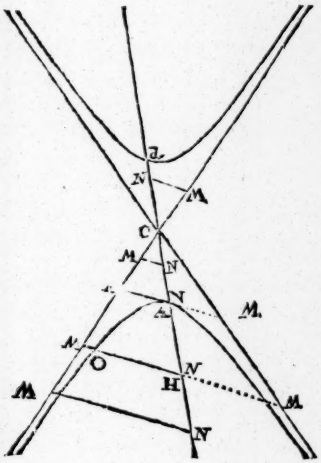
Effectiones Geometricæ.

PRoblematum effectiones quæ de Ellipſi memorantur prop. 31. eædem ferè totidem verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Nec opus eſt ut repetantur.

PROP. XXXIX.

De Hyperbolæ Aſymptotis.

SI ſumatur in Hyperbolæ diametro (extra centrum **C**) punctum quodvis **N**, eíq; ordinatim ponatur **NM**; fiátq; *t. l* :: **CNq. NMq.** (hoc eſt, ut diameter tranſverſa, ad latus rectum; ſic quadratũ diſtantiæ punctorum **CN**, ad quadratum rectæ **NM**,) juncta **CM** erit illius Hyperbolæ *Aſymptota:* Nempe quæ (cõtinuata) Hyperbolæ (quantumvis productæ) nunquam occurret, ita tamen continuo propius accedet ut diſtantia tandem evadat quâvis aſſignatâ minor.



Nam 1°. Sumpto (intra Hyperbolam **AO**) diametri puncto quovis **H**,

H, cui ordinatim-applicetur HO, rectæ CM occurrens in M. Erit (propter similia triangula) CN. NM :: CH. HM Adeoquè CNq. NMq :: (t. l ::) CHq = c^2. HMq = $\frac{l}{t}c^2 = \frac{c^2}{t}l$.

Sed (propter Hyperbolam) erit HOq = $\frac{c^2 - s^2}{t}l$ (ponendo nempe $s = \frac{1}{2}t$, ideoq; $d = c - s$, & $d + t = c + s$.) Ergo HOq minus est quam HMq, & recta HO minor quam recta HM & propterea M erit extra Hyperbolam. Recta igitur CMM (quantumvis producta) Hyperbolæ nunquam occurrit. Quod erat primo demonstrandum.

2°. Cùm sit OM (= HM - HO) = $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$; sintq; s, l, t, quantitates stabiles, at c variabilis, & quidem tanto major quanto remotius abest punctum H a centro C: Differentia rectarum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$, $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$, hoc est, rectarum HM, HO, perpetuo minuetur prout c, hoc est, CH, augetur. Nam in majoribus quadratis æquale augmentum (retenta figuræ specie) minorem postulat lateris productionem quam in quadratis minoribus, (ut notum est.) Ideoq; prout longius abest a centro punctum H, adeoq; c^2 majus est, (reliquis interim immutatis) ita semper minuetur OM, differentia laterum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$, $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$. Et consequenter distantia rectæ CMM ab Hyperbolæ curva AO, continue decrescit. Quod erat secundò demonstrandum.

3°. Sit assignata distantia quælibet quantumvis exigua, puta $2a$; Dico Hyperbolam AO rectamq; CM eò produci posse, ut earum distantia minor evadat quam est assignata $2a$. Sumatur enim linea recta aliquanto minor, puta a, cui æqualem esse volumus rectam OM; & quærendum sit punctum H (cui ordinatim-ponenda sit HOM) seu longitudo rectæ CH. Quoniam igitur supponimus a = OM = $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$; erit (transponendo) $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l} = \sqrt{\frac{c^2}{t}l} - a$; & (utrinquè qua-

quadrando) $\frac{c^2-s^2}{t}l=\frac{c^2}{t}l+a^2-2a\sqrt{\frac{c^2}{t}}l$. Et (transponendo, atq; reducendo) $2ac\sqrt{\frac{l}{t}}=a^2+\frac{s^2}{t}l$. Et (quadrando) $\frac{4a^2c^2l}{t}=a^4+s^4\frac{l^2}{t^2}+\frac{2a^2s^2l}{t}$. Adeoquè (dividendo per $\frac{4a^2l}{t}$) erit $c^2=\frac{a^4l^2+s^4l^2+2a^2s^2lt}{4a^2lt}$. Habetur ergo quantitas c^2, (cuius radix $c=CH$,) adeoq; punctum H, cui si Ordinatim ponatur COM, erit $OM=a$, (quod, si opus sit synthetice demonstrari possit, repetitis Analyseos vestigiis,) adeóq; minor quam distantia assignata $2a$. Ideoq; distantia continuatæ rectæ CMM, ab Hyperbolâ continuatâ AO, tandem minor evadet distantia quâvis assignata. Quod erat tertio demonstrandum. Adeoq; constat propositum.

Posset & hic ostendi, *Ad eandem Hyperbolam, nonnisi duas Asymptotas (utrinq; unam) duci posse; se mutuo in centro secantes.* Alia enim quæcunq; in eodem plano recta, vel Hyperbolam secabit, vel ad requisitam appropinquationem non accedet. Ut facile est demonstratu.

Item, *Asymptotas unius Hyperbolæ esse etiam Hyperbolæ oppositæ Asymptotas.* Quod simili fere progressu demonstrabitur ei quo usus sum ad Corollarium prop. 37.

Neq; illis tantum binis Hyperbolis Oppositis, sed & binis aliis hisce conjugatis (de quibus post dicetur) eædem conveniunt Asymptotæ, & quidem solæ.

Patet item, quod (*si ab eodem puncto H, ordinatim-applicatæ HO, HO, utrinq; continuentur ut Asymptotis occurrant in M,*) *erunt, OM, OM, (utrinq; sumptæ) æquales.* Cum enim tam HM, HM, ($\sqrt{\frac{c^2}{t}}l$) quam HO, HO, ($\sqrt{\frac{c^2}{t}}l-\sqrt{\frac{c^2-t^2}{t}}l$) erunt & OM, OM, (HM—HO) æquales.

Item; *Si (ad eandem quamvis Diametrum) Ordinatim ponantur rectæ quotlibet MOHM, (Asymptotis occurrentes in M Hyperbolæ in O, diametro in H,) omnia rectangula MOM (segmentis comprehensa) vel etiam rectangula OMO (sumptis O, O, in utroq; crure Hyperbolæ) erunt*

tam

tam inter se, quam quadratæ rectæ AM (ab Asymptotâ ad verticem ordinatim-positæ) æqualia. Nam ubicunq; in diametro (intra Hyperbolam) sumatur punctum applicationis H: rectangulum MOM vel OMO, (hoc est, HM — HO, in HM + HO; hoc est $\sqrt{\frac{c^2}{t}}l - \sqrt{\frac{c^2-s^2}{t}}l$, in $\sqrt{\frac{c^2}{t}}l + \sqrt{\frac{c^2-s^2}{t}}l$;) semper erit $\frac{s^2}{t}l$ (ut multiplicando patebit;) hoc est AMq; est enim (ex hypothesi) $t.l :: CNq.NMq :: CAq (=s^2).AMq = \frac{s^2}{t}l$.

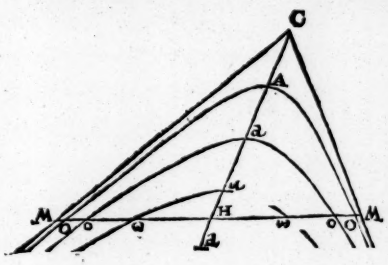
Asymptota verò, quæ jam dicitur, eadem est quæ ad prop. 36. supponitur *Tangens infinita*, a Centro ducenda, quæ non nisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) Hyperbolam continget.

Alia de Asymptotis & Theoremata & Problemata quæ ex jam dictis deduci possent prætereo.

PROP. XL.

De Hyperbolis Asymptotis.

HYperbolæ quotlibet ad eandem diametrum (versus easdem partes) ita accommodatæ, ut centrum idem habeant, atq; easdem (ad communem diametrum) Ordinatim-positas, vertices autem (in eâdem diametro) varios quoslibet, puta A, a, α, (adeoq; & varias diametros-interceptas;) Si eadē sit in omnibus ratio diametri-trāsversæ ad suum respective latus-rectum



ctum, (puta ratio t ad l in omnibus eadem) eaſdem habebunt Aſymptotas-rectas, (puta CM, per præced.) Erúntq; ipſę ad invicem *Hyperbolæ Aſymptotæ*: Nempe ita ad invicem appropinquabunt ut earum diſtantia tandem evadat quâlibet aſſignatâ minor, (quoniam earum quælibet ita prope ad rectas Aſymptotas accedit;) nec tamen invicem occurrent, (quoniam Ordinatim-applicatarum quadrata $h^2 = \frac{r^2 - s^2}{t} l$ minora erunt, cæteris paribus, ubi s major eſt; adeoq; HO major quam Ho, atq; hæc major quàm Hω.)

Si verò non ſit (in variis ejuſmodi Hyperbolis) ratio $\frac{l}{t}$ eadem: Nec eaſdem habebunt aſymptotas rectas; neq; erunt ipſę Aſymptotę; ſed vel ſe mutuò ſecabunt, (nempe ſi Hyperbola quę majorem habet diametrum-tranſverſam minorem habeat rationem t ad l;) vel (ſi majorem habeat rationem t ad l) debitam appropinquationem non attingent. Prout ex præmiſſis non eſt difficile demonſtratu.

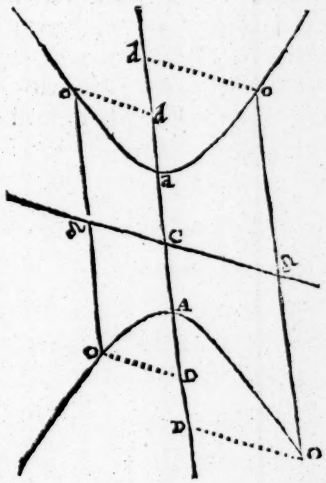
Illis autem, quas diximus, *Hyperbolis Aſymptotis*, reſpondent Hyperbolæ totidem ejuſdem Coni planis paralleli ſecti; Quæ quidem quò propius ad verticem Coni accedunt, eò ad Triangulum accedunt propiùs; donec tandem (in ipſo coni vertice,) evaneſcente diametro tranſverſa, Hyperbola in Triangulum (vel ſi placet, Trianguli crura) degeneret; cujus quidem Trianguli crura repræſentant binæ Aſymptotæ rectæ.

PROP. XLI.

De Hyperbolæ Diametris Conjugatis.

SI oppoſitarum Hyperbolarum diametro-tranſverſę Aa Ordinatim-ponatur recta per centrum δCδ, dicetur illa *Diameter-conjugata*: quæ

quę quidem rectas omnes diametro A a parallelas, oppoſitis ſectionibus terminatas, puta Oo, bifariam ſecabit; quę propterea diametro ♂♂ ordinatim-poſitę ſunt, quas *Ordinatim-tranſcriptas* dicere licet.



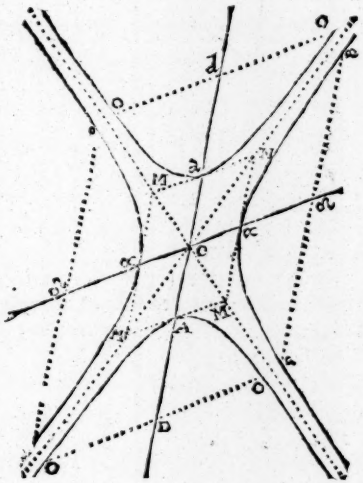
Nam ſi ordinatim-applicentur OD, od, diametro Aa (verſus eaſdem partes;) erunt illæ (parallelæ parallelis terminatæ, ideóq;) æquales; & propterea CD, Cd, etiam æquales erunt (propter communem oppoſitarum Hyperbolarum diametrum-tranſverſam, & æqualia latera-recta;) ideóq; & ♂O, ♂o, (propter parallelas) æquales erunt.

Sunt autem rectæ ♂O hoc eſt CD, ea quantitas quam ſupra diximus $c = s + a = \frac{1}{2}i + d$.

PROP. XLII.

De Conjugatis Hyperbolis.

SI ſit Hyperbolarum Oppoſitarum tranſverſa-diameter $Aa = t$, (& Latus rectum l;) atq; in diametro conjugata $\delta\delta$, ſumantur a centro utrinq; æquales $C\alpha$, $C\alpha$; ſitq; tota $\alpha C\alpha = \tau = \sqrt{tl}$ (ut nempe ſit $t. l :: t^2. \tau^2.$) dicetur $\alpha C\alpha$ *tranſverſa-diameter conjugata*: Eâq; ſi deſcribantur Oppoſitæ Hyperbolæ, vertices habentes α, α, & Ordinatim-applicatas $\delta\omega$ diametro A a parallelas, Latuſq; rectum $\lambda = \frac{l^2}{\tau}$, (ut nempe ſit $\tau. \lambda :: \tau^2. t^2.$) dicentur



oppoſiti vertices $\alpha\alpha$ ipſis A a *vertices conjugati*; atq; Hyper-

Hyperbolæ α α, ipſis A a, *Hyperbolæ conjugatæ*; commune cum illis centrum habentes, (ut patet.) Sed & eaſdem habebunt Aſymptotas rectas: ut jam demonſtraturus ſum.

Nam completo parallelogrammo M M, (cujus latera per conjugatos vertices tranſeant, ſintq; conjugatis diametris tranſverſis parallela, & propterea æqualia;) erunt rectæ C M omnium Aſymptotæ; per prop. 39. (Idem accidet, ſi, ſumptis quibuſvis C D, C δ, ipſis C A, C α, proportionalibus, formetur parallelogrammum circa idem centrum C, latera habens conjugatis diametris parallela: Omnia enim puncta angularia, in Aſymptotis C M reperientur. Puta, ſi ordinatim applicatæ, in hac Figura deſcriptæ, ad Aſymptotas uſq; continuarentur.)

Præter illas autem Aſymptotas duas, nulla in eodem plano recta duci poteſt, quæ (producta) non alicui ex conjugatis Hyperbolis (productis) occurret. Ut ex prædictis facile eſt demonſtratu.

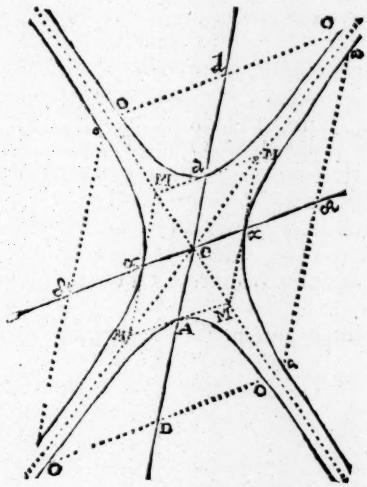
Parallelogrammum autem M M (per quatuor conjugatos vertices tranſiens) reſpondet parallelogrammo Ellipſi circumſcripto per ipſius conjugatos vertices tranſeunti.

PROP. XLIII.

De Syſtemate Hyperbolico.

QUatuor illæ, quas diximus, Hyperbolę conjugatę, reſpondent totidem (in Ellipſi) conjugatis ſectionibus Ellipticis (de quibus prop. 29. dictum eſt.) cum hoc tamen (inter alia) diſcrimine, quòd quatuor ſectiones Ellipticę, centrum verſus incurvatę ſe mutuò continuant; at conjugatę Hyperbolę, a centro recurvatę (partem convexam centrum verſus habentes) neq; ſibi invicem, neq; ſuis Aſymptotis rectis, niſi poſt infinitam diſtantiam occurrunt, aut occurſuras eſſe ſupponuntur. Tota verò figura

gura quæ contineri ſupponitur (aut ſupponi poſſit) quatuor convexis Hyperbolis, (ſibi mutuo, ut & Aſymptotis rectis, poſt infinitam diſtantiam concurrentibus,) toti figurę Ellipticę reſpondet.



Quatuor autem illas Hyperbolas conjugatas, infinitè continuatas, tandem concurſuras; ſuppono quidem, non quod vel reapſe concurrent, vel etiam actu poterunt infinitè continuari, (cum actu infinitum ejuſmodi dari non poſſit:) ſed quoniam qui alterum ſupponit ſupponere debet & reliquum. Multa autem apud Mathematicos ſupponi quæ actu non exiſtunt, ſat notum eſt: quæ veritatem habent *Conſequentiæ* (ut loquuntur) ſive Hypotheticam, licet non *Conjequentis* ſive Abſolutam.

Atq; hinc eſt, quod Polygonum regulare infinitorum laterum pro circulo haberi ſoleat; aliaq; ejuſmodi innumera: Et quidem univerſaliter, *Quantitates, quæ ita ad invicem continuo propius accedunt, ut earum (continuatarum) diſtantia quâlibet aſſignatâ mino-*

minor evadat; ſupponendæ ſunt (in infinitum continuatæ) tandem convenire.

Quod quidem eodem modo demonſtrari poteſt quo 1ª Archimedis *de circuli dimenſione*, aliæq; paſſim apud Geometras demonſtrari ſolent. Nempe, ſi in infinitum continuentur; vel concurrent (quod affirmatur,) vel adhuc diſtabunt; at hoc eſt impoſſibile? Si enim diſtent, eſto ea diſtantia ſive differentia *a* quantumvis exigua, probari autem poteſt eas propius accedere quam eſt ea diſtantia aſſignata, (hoc enim ponitur:) non igitur diſtant; conveniunt ergo. quod erat demonſtrandum.

Neq; poteſt quidem hæc demonſtratio quovis modo eludi, magis quàm illa Archimedis modò memorata, aliæq; apud Mathematicos innumeræ.

PROP. XLIV.

Ellipſeos & Hyperbolæ comparatio.

PAtet ex Ellipſeos & Hyperbolæ doctrinâ ſuperiùs traditâ; earum ad invicem cognationem magnam eſſe. Maximum autem inter eas diſcrimen (unde & reliqua omnia ortum ducunt) hoc eſt, Quod, *in Ellipſi, diameter tranſverſa atq; intercepta ſuper ſe mutuo replicari ſupponitur; in Hyperbola vero, ſe mutuo continuare.* Adeóq; in Ellipſi Da = Aa − AD = $t - d$; in Hyperbola vero Da = Aa + AD = $t + d$. Atq; hinc quidem Ellipſeos incurvatio verſus centrum, & Hyperbolæ recurvatio a centro, aliáq; omnia quæ interveniunt diſcrimina: ut probè attendenti patebit. Adeoq; totum ferè Ellipſeos doctrinam Hyperbolæ accommodavimus (conſulto quidem, ut earum cognatio melius percipiatur) totidem fere verbis, mutatis tantum ſignis + −.

Atq; hactenus Parabolæ, Ellipſeos, & Hyperbolæ doctrinam, ſuccinctè quidem, ſed & dilucidè tradidimus.

APPENDIX.

APPENDIX.

TRadidimus, *in ſuperioribus, trium illarum (prout vulgò dicuntur) Coni-ſectionum,* Parabolæ, Ellipſeos, *atq;* Hyperbolæ, *doctrinam, ſuccinctè ſatis, ſed & interim ſatis (ni fallor) dilucidè. Earumq; vel omnes vel præcipuas ſaltem affectiones vel demonſtravimus, vel ſaltem demonſtrationum fontes indicavimus; ut inde liceat levi negotio ea omnia deducere, quæ longis ambagibus, atq; perplexo variorum Lemmatum & demonſtrationum intricatarum labore antehac oſtendi conſueverunt.*

Atq; hæc omnia brevi admodum atq; ſuccincta methodo tradita ſunt; præſertim ſi omittantur ea omnia (quæ quidem tutò nec incommodè omitti poſſe videantur) quæ tota parte prima tradidimus; quæ quidem Conum ſpectant, atq; illarum ad conum relationem, cum quibus tamen præſens doctrina (quanquam ſecus olim creditum eſt) nullam habet neceſſariam connexionem; ſed ſimpliciùs atq; univerſalius tradi & poteſt & debet.

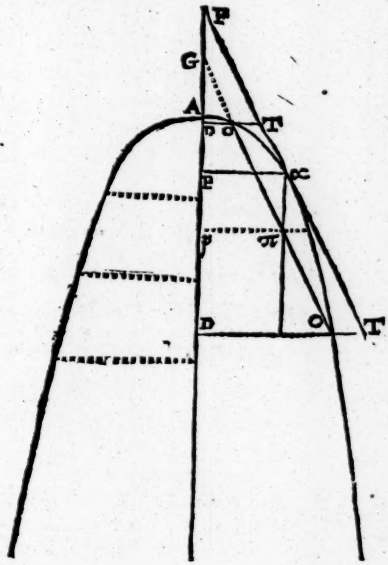
Sed interim viam ſimul apperuimus qua Curvarum doctrinam penitius intueri atq; ulterius promovere facilè poſſimus: (quod & nos fortaſſe deinceps aliquando, Deo favente, facturi ſumus, ſi illud neceſſe videbitur, atq; viris doctis Mathematum peritis labores noſtros gratos fore perſpiciemus.) Interim ſpecimen aliquod libet apponere, de curvis aliis Parabolæ affinibus, quarum Diametri, Ordinatim-applicatæ, Latera-recta, Tangentes, &c. non minus quàm in ipſâ Parabolâ reperiantur.

PROP.

PROP. XLV.

De Paraboloide Cubicali.

SI Paraboloides ita constituatur, ut Ordinatim-applicatas habeat in subtriplicatâ ratione Diametrorum-interceptarum; (adeóq; illarum Cubos diametris-interceptis proportionales:) *Paraboloides Cubicale* dici poterit.



Latus-rectum Paraboloidis cubicalis (puta l,) appello rectam imaginariam, cujus quadratum in diametrum-interceptam ductum, æquatur cubo Ordinatim-applicatæ. Ut sit ubiq; $p^3 = l^2 d$.

APPENDIX.

TRadidimus, in superioribus, trium illarum (prout vulgò dicuntur) Coni-sectio
rabolæ, E
nam, suc
(ni fallor)
præcipuas saltem affec
tem demonstrationum
levi negotio ea omnia
atq; perplexo variorum
intricatarum labore an
Atq; hæc omnia bre
do tradita sunt; præser
quidem tutò nec incom
tota parte prima tradi
ctant, atq; illarum ad
men præsens doctrina
est) nullam habet nece
ciùs atq; universalius t
Sed interim viam si
ctrinam penitius intue
possimus: (quod & nos
favente, facturi sumus,
viris doctis Mathematu
fore perspiciemus.) Inte
nere, de curvis aliis Parabolæ affinibus, quarum Diametri, Ordinatim-applicatæ, Latera-recta, Tangentes, &c. non minus quàm in ipsâ Parabolâ reperiantur.

IRREGULAR PA

PROP.

PROP. XLV.

De Paraboloide Cubicali.

SI Paraboloides ita conſtituatur, ut Ordinatim-applicatas habeat in ſubtriplicatâ ratione Dia- adeóq; illarum ionales.) *Parabo-*

AR PAGINATION

Latus-rectum Paraboloidis cubicalis (puta l,) appello rectam imaginariam, cujus quadratum in diametrum-interceptam ductum, æquatur cubo Ordinatim-applicatæ. Ut ſit ubiq; $p^3 = l^2 d$.

APPENDIX.

TRadidimus, in superioribus, trium illarum (prout vulgò dicuntur) Coni-sectionum, Parabolæ, Ellipseos, atq; Hyperbolæ, doctrinam, succinctè satis, sed & interim satis (ni fallor) dilucidè. Earumq; vel omnes vel præcipuas saltem affectiones vel demonstravimus, vel saltem demonstrationum fontes indicavimus; ut inde liceat levi negotio ea omnia deducere, quæ longis ambagibus, atq; perplexo variorum Lemmatum & demonstrationum intricatarum labore antehac ostendi consueverunt.

Atq; hæc omnia brevi admodum atq; succincta methodo tradita sunt; præsertim si omittantur ea omnia (quæ quidem tutò nec incommodè omitti posse videantur) quæ tota parte prima tradidimus; quæ quidem Conum spectant, atq; illarum ad conum relationem, cum quibus tamen præsens doctrina (quanquam secus olim creditum est) nullam habet necessariam connexionem; sed simpliciùs atq; universalius tradi & potest & debet.

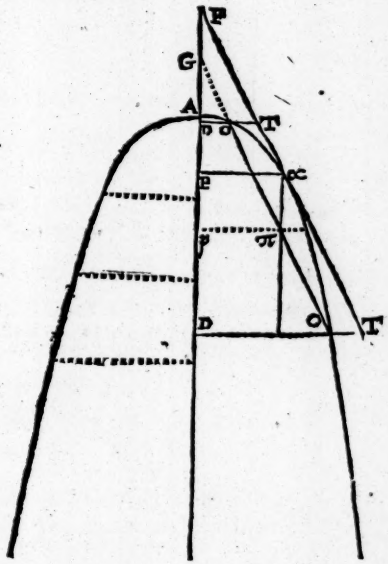
Sed interim viam simul apperuimus qua Curvarum doctrinam penitius intueri atq; ulterius promovere facilè possimus: (quod & nos fortasse deinceps aliquando, Deo favente, facturi sumus, si illud necesse videbitur, atq; viris doctis Mathematum peritis labores nostros gratos fore perspiciemus.) Interim specimen aliquod libet apponere, de curvis aliis Parabolæ affinibus, quarum Diametri, Ordinatim-applicatæ, Latera-recta, Tangentes, &c. non minus quàm in ipsâ Parabolâ reperiantur.

PROP.

PROP. XLV.

De Paraboloide Cubicali.

SI Paraboloides ita constituatur, ut Ordinatim-applicatas habeat in subtriplicatâ ratione Diametrorum interceptarum; (adeóq; illarum Cubos diametris-interceptis proportionales:) *Paraboloides Cubicale* dici poterit.



Latus-rectum Paraboloidis cubicalis (puta l,) appello rectam imaginariam, cujus quadratum in diametrum-interceptam ductum, æquatur cubo Ordinatim-applicatæ. Ut sit ubiq; $p^3 = l^2 d$.

PROP. XLVI.

De rectâ Paraboloides Cubicale contingente.

SI Paraboloides Cubicale A α, in puncto quovis α, contingat recta αF, diametro PA occurrens in F, sitq; eidem diametro ordinatim-applicata αP: erit recta AF (diametri continuatio) dupla diametri-interceptæ PA: hoc est, diameter continuata PF, tripla diametri PA.

Nam, sumpto ubivis (in cadem diametro) puncto D, cui ordinatim-applicetur DO, tangenti αF occurrens in T: Punctum T (propter tangentem) vel erit idem cum puncto α, (si nempe P, D, coincidant:) vel (si secus) erit T extra curvam: & (propterea) DT ≷ DO (nempe æquales, si D, P, coincidant; vel, si secus, DT longior erit.)

Ponamus autem (ob commodiorem calculum) Pα = *p*, PA = *d*, PF = *f*, PD = *a*. Erit ergo (per def. præced.) PA. DA :: Pα. DOc. hoc est $d.d \pm a :: p^3. \frac{d \pm a}{d} p^3 = DOc.$ Item (propter similia triangula) PF. Pα :: DF. DT. hoc est $f.p :: f \pm a. \frac{f \pm a}{f} p = DT.$ Ejusq; cubus $\frac{f^3 \pm 3f^2a + 3fa^2 \pm a^3}{f^3} p^3$ (= DTc) ≷ (DOc =) $\frac{d \pm a}{d} p^3$ Et (utrinq; multiplicando per $f^3 d$, & dividendo per p^3) erit $f^3 d \pm 3f^2 da \pm 3fda^2 \pm da^3 \gtrless f^3 d \pm f^3 a$. Tum (auferendo utrinq; $f^3 d$, & dividendo per $\pm a$) erit $3f^2 d \pm 3fda + da^2 \gtrless f^3$. Deniq;, ponendo puncta P D coincidere, (ut evanescat quantitas a, adeóq; & ipsius multiplicia $\pm 3fda, + da^2$,) erit $3f^2 d = f^3$, hoc est $3d = f$. Quod erat demonstrandum.

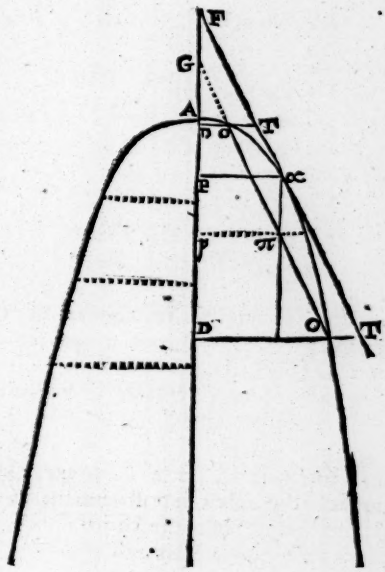
PROP.

PROP. XLVII.

De Paraboloidis Cubicalis Diametris.

IN Paraboloide Cubicali Diametri ſunt invicem parallelæ: Et cujuſvis diametri Ordinatim-applicatæ, ſunt rectæ in ipſius Vertice contingenti parallelę.

Demonſtratio facile inſtitui poterit ad imitationem illius quæ de Parabolâ adhibetur ad prop. 24. niſi quod PF, quæ illic dicitur 2*d*, hic dicenda eſt 3*d*. Eam nempe Analyticè ſic examinabimus. Supponamus ſcilicet rem ita eſſe ut perhibetur: Adeóq; rectam F*α*, quæ parabolam A*α* in puncto *α* contingat, diametro PA productæ occurrere in F; eiq; parallelam OO parabolæ inſcriptam, quæ (producta) eid m diametro ſupra verticem occurrat in G, (adeóq; ſi infra verticem diametro occurrat; tum tam duarum DG, quam duarum DO, de quibus mox dicetur, altera erit quantitas negativa, quod tamen calculum non turbabit;) ipſamq; OO recta *α π* (parallela diametro AP) biſectam in *π* (ut nempe recta *π*O, *π*O, ſint ipſi *α π* ordinatim-applicatæ;) denique diametro AP ordinatim-applicari OD, OD, *α*P, ipſiq;



parallelam πp eidem diametro occurrere in p: quare & (propter parallelas) $Pp = a\pi = FG$; & propterea $PF = pG$: item (propter parallelas) rectam DD bisectam in p, sicut O() bisecatur in π. Quærendum autem est, numcubi reperiri possint puncta D, D; quæ quidem sicubi inveniantur, constabit propositum.

Substitutis igitur idoneis symbolis, esto $Pa = p$. $PA = d$. (ideóq;, per præced: $PF = pG = 3d$) $Pp = a\pi = FG = g$. (ergo $p\pi = PA + Pp = d + g$.) $pD = q$. (ideoq; $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. & $DG = pG \pm pD = 3d \pm q$.)

Erit igitur (propter Paraboloides cubicale per prop 45.) $PA. DA :: Pa^3. DO^3$. hoc est, $d. d + g \pm q :: p^3. \frac{d + g \pm q}{d} p^3 = DO^3$.

Item (propter similia triangula) $PF. Pa :: DG. DO$. hoc est, $3d. p :: 3d \pm q. \frac{3d \pm q}{3d} p = DO$. Ejusque cubus $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3} p^3 = DO^3 = \frac{d + g \pm q}{d} p^3$.

Ergo (utrinq; dividendo per p^3, & multiplicando per $27d^3$) erit $27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3 = 27d^3 + 27d^2g \pm 27d^2q$. Et (sublatis utrinq; æqualibus) $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Cujus quidem æquationis radix q, si vel ope Conisectionis vel alio quovis modo reperiri poterit, monstrabit quæsita puncta D, D, (alterum quidem supra punctum p, alterum infra;) adeóq; propositi veritatem.

Quo autem pacto ejusmodi æquationes cubicæ resolvi poterunt, non hujus loci est inquirere. Potest illud fieri vel methodo *Cartesiana*, vel juxta *Vietæ* exegesin numerosam, vel alia siquam alius quivis in posterum magis accommodatam invenerit, methodo. Sufficit instituto nostro ad eam æquationem rem perduxisse, quæ veram radicem negotio accommodam contineat.

Analysi peractâ, Demonstrationem syntheticam sic licet instituere.

In Paraboloide cubicali Aa, diametro AP, parallela ducatur $a\pi$: per cujus punctum quodvis (intra paraboloides) π,

ducatur

ducatur recta πG (diametro AP occurrens in G) parallela tangenti αF (quæ eidem diametro occurrit in F.) Dico $\alpha\pi$ ejusdem Paraboloideos diametrum esse, eiq; ordinatim positam πG.

Diametro AP ordinatim-applicetur αP, eiq; parallela ducatur πp (eidem diametro occurrens in p.) Et sunto symbola $P\alpha = p$. $PA = d$. $FG = \alpha\pi = Pp = g$.

Tum sumantur in diametro, utrinq; a puncto p, æquales rectæ $pD = pD = q$; utraq; nempe tanta, quanta est radix hujus æquationis $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Et punctis D, D, ordinatim ponantur rectæ DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O: quæ cum parallelæ sint rectæ πp, sicut recta DD (ex constructione) bisecatur in p, erit ideo OO (propter parallelas) bisecta in π.

Superest igitur ut ostendam rectam OO (bisectam in π) Paraboloidi inscriptam esse (ut nempe $\alpha\pi$ recta bisecans sit diameter) hoc est, puncta O, O, esse in Paraboloideos curva; nempe rectas DO, DO, (diametro AP ordinatim-positas, ex constructione,) ordinatim-applicatis (ad eadem diametri puncta) æquales esse, adeoq; in curva terminari. Quod sic ostenditur.

Est $pA = PA + Pp = d + g$. $DA = pA + pD = d + g \pm q$. $pG = PF = 3d$. $DG = pG \pm pD = 3d \pm q$.

Tum (propter Paraboloides cubicale) ut PA, ad DA; sic cubus rectæ $P\alpha$ puncto P ordinatim-applicatæ, ad cubum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc est $d.\ d+g \pm q :: p^3.\ \frac{d+g \pm q}{d}p^3$. qui igitur cubus est ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem est cubus rectæ DO. Nam (propter similia triangula) PF. $P\alpha$ :: DG. DO. hoc est $3d.\ p :: 3d \pm q.\ \frac{3d \pm q}{3d}p = DO$. Ejusq; cubus $DOc = \frac{27d^3 \pm 27d^2q + qdq^2 \pm q^3}{27d^3}p^3$. Vel (pro $qdq^2 \pm q^3$, substituendo $27d^2g$, quæ per constructionem sunt æqualia,) $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 27d^2g}{27d^3}p^3$, vel deniq; (abbreviando fractionem per $27d^3$) $\frac{d \pm q + g}{d}p^3 = DOc$. adeoq; rectæ DO, DO, ordinatim-applicatæ sunt punctis D, D, ad Paraboloideos curvam terminatæ in O, O;

parallelam πp eidem diametro occurrere in p: quare & (propter parallelas) $Pp = \alpha\pi = FG$; & propterea $PF = pG$: item (propter parallelas) rectam DD bisectam in p, ſicut O() biſecatur in π. Quærendum autem eſt, numcubi reperiri poſſint puncta D, D; quæ quidem ſicubi inveniantur, conſtabit propoſitum.

Subſtitutis igitur idoneis ſymbolis, eſto $P\alpha = p$. $PA = d$. (ideóq; per præced: $PF =$ [illegible] $FG =$ [illegible]
$pA = PA + Pp = d + g$.)
$d + g \pm q$. & $DG = pG$ [illegible]
Erit igitur (propter [illegible]

$PA. DA :: P\alpha^3. DO^3$. hc
$= DO^3$.

Item (propter ſimilia

eſt, $3d. p :: 3d \pm q.$ [illegible]

$$\frac{27d^2 \pm 27d^2q + 9dq}{27p^2}$$

Ergo (utrinq; dividen
erit $27d^2 \pm 27d^2q$
$27d^2q$. Et (ſublatis
$27d^2g$. Cujus quidem
ſectionis vel alio quovi
quæſita puncta D, D; (a
rum infra;) adeóq; pro

IRREGULAR PA

Quo autem pacto ejuſ
runt, non hujus loci eſt ir
do *Carteſiana*, vel juxta
ſiquam alius quivis in poſ
rit, methodo. Sufficit inſi
perduxiſſe, quæ veram r
tineat.

Analyſi peractâ, Demonſtrationem ſyntheticam ſic licet inſtituere.

In Paraboloide cubicali $A\alpha$, diametro AP, parallela ducatur $\alpha\pi$: per cujus punctum quodvis (intra paraboloides) π, ducatur

ducatur recta πG (diametro AP occurrens in G) parallela tangenti αF (quæ eidem diametro occurrit in F.) Dico $\alpha\pi$ ejusdem Paraboloideos diametrum esse, eiq; ordinatim positam πG.

Diametro AP ordinatim-applicetur αP, eíq; parallela ducatur πp (eidem diametro occurrens in p.) Et sunto symbola $P\alpha = p$. $PA = d$. $FG = \alpha\pi = Pp = g$.

Tum sumantur in diametro, utrinq; a puncto p, æquales re-

[illegible] quanta est radix hujus [illegible] punctis D, D, ordina- [illegible] occurrentes in O, O: [illegible] recta DD (ex constru- [illegible] propter parallelas) bi-

[illegible] (bisectam in π) Pa- [illegible] recta bisecans sit dia- [illegible] paraboloideos curva; nem- [illegible] ordinatim positas, ex con- [illegible] eidem diametri puncta) [illegible] Quod sic ostenditur.

AR PAGINATION

[illegible] $+ pD = d + g \pm q$. pG

[illegible] ut PA, ad DA; sic cu- [illegible] catæ, ad cubum ordi-

$+ g \pm q :: p^3 . \frac{d+g \pm q}{d} p^3$.

[illegible] e puncto D.

[illegible] Nam (propter simi- [illegible] hoc est $3d . p :: 3d \pm q .$

$\frac{27d^3 \pm 27d^2q + qdq^2 \pm q^3}{27d^2}$

$27d^2g$, quæ per con-

$\frac{27d^3q + 27d^2g}{27d^2} p^3$,

vel deniq; (abbreviando fractionem per $27d^2$) $\frac{d \pm q + g}{d} p^3 = DOc$. adeoq; rectæ DO, DO, ordinatim-applicatæ sunt punctis D, D, ad Paraboloideos curvam terminatæ in O, O;

parallelam πp eidem diametro occurrere in p: quare & (propter parallelas) $Pp = \alpha\pi = FG$; & propterea $PF = pG$: item (propter parallelas) rectam DD bisectam in p, sicut OO bisecatur in π. Quærendum autem est, numcubi reperiri possint puncta D, D; quæ quidem sicubi inveniantur, constabit propositum.

Substitutis igitur idoneis symbolis, esto $P\alpha = p$. $PA = d$. (ideóq;, per præced: $PF = pG = 3d$) $Pp = \alpha\pi = FG = g$. (ergo $p\pi = PA + Pp = d + g$.) $pD = q$. (ideoq; $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. & $DG = pG \pm pD = 3d \pm q$.)

Erit igitur (propter Paraboloides cubicale per prop 45.) $PA. DA :: P\alpha. DOc.$ hoc est, $d. d + g \pm q :: p^3. \frac{d + g \pm q}{d} p^3 = DOc.$

Item (propter similia triangula) $PF. P\alpha :: DG. DO.$ hoc est, $3d. p :: 3d \pm q. \frac{3d \pm q}{3d} p = DO.$ Ejusque cubus $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3} p^3 = DOc = \frac{d + g \pm q}{d} p^3.$

Ergo (utrinq; dividendo per p^3, & multiplicando per $27d^3$) erit $27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3 = 27d^2 + 27d^2g \pm 27d^2q$. Et (sublatis utrinq; æqualibus) $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Cujus quidem æquationis radix q, si vel ope Conisectionis vel alio quovis modo reperiri poterit, monstrabit quæsita puncta D, D, (alterum quidem supra punctum p, alterum infra;) adeóq; propositi veritatem.

Quo autem pacto ejusmodi æquationes cubicæ resolvi poterunt, non hujus loci est inquirere. Potest illud fieri vel methodo *Cartesiana*, vel juxta *Vietæ* exegesin numerosam, vel alia siquam alius quivis in posterum magis accommodatam invenerit, methodo. Sufficit instituto nostro ad eam æquationem rem perduxisse, quæ veram radicem negotio accommodam contineat.

Analysi peractâ, Demonstrationem syntheticam sic licet instituere.

In Paraboloide cubicali $A\alpha$, diametro AP, parallela ducatur $\alpha\pi$: per cujus punctum quodvis (intra paraboloides) π, ducatur

ducatur recta πG (diametro AP occurrens in G) parallela tangenti αF (quæ eidem diametro occurrit in F.) Dico $\alpha\pi$ ejusdem Paraboloideos diametrum esse, eiq; ordinatim positam πG.

Diametro AP ordinatim-applicetur αP, eiq; parallela ducatur πp (eidem diametro occurrens in p.) Et sunto symbola $P\alpha = p$. $PA = d$. $FG = \alpha\pi = Pp = g$.

Tum sumantur in diametro, utrinq; a puncto p, æquales rectæ $pD = pD = q$; utraq; nempe tanta, quanta est radix hujus æquationis $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Et punctis D, D, ordinatim ponantur rectæ DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O: quæ cum parallelæ sint rectæ πp, sicut recta DD (ex constructione) bisecatur in p, erit ideo OO (propter parallelas) bisecta in π.

Superest igitur ut ostendam rectam OO (bisectam in π) Paraboloidi inscriptam esse (ut nempe $\alpha\pi$ recta bisecans sit diameter) hoc est, puncta O, O, esse in Paraboloideos curva; nempe rectas DO, DO, (diametro AP ordinatim-positas, ex constructione,) ordinatim-applicatis (ad eadem diametri puncta) æquales esse, adeoq; in curva terminari. Quod sic ostenditur.

Est $pA = PA + Pp = d + g$. $DA = pA + pD = d + g \pm q$. $pG = PF = 3d$. $DG = pG \pm pD = 3d \pm q$.

Tum (propter Paraboloides cubicale) ut PA, ad DA; sic cubus rectæ $P\alpha$ puncto P ordinatim-applicatæ, ad cubum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc est $d.\ d+g \pm q :: p^3.\ \frac{d+g \pm q}{d} p^3$. qui igitur cubus est ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem est cubus rectæ DO. Nam (propter similia triangula) PF. $P\alpha$ :: DG. DO. hoc est $3d.\ p :: 3d \pm q.\ \frac{3d \pm q}{3d} p = DO$. Ejusq; cubus $DOc = \frac{27d^3 \pm 27d^2q + qdq^2 \pm q^3}{27d^3} p^3$. Vel (pro $qdq^2 \pm q^3$, substituendo $27d^2g$, quæ per constructionem sunt æqualia,) $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 27d^2g}{27d^3} p^3$, vel deniq; (abbreviando fractionem per $27d^3$) $\frac{d \pm q + g}{d} p^3 = DOc$. adeoq; rectæ DO, DO, ordinatim-applicatæ sunt punctis D, D, ad Paraboloideos curvam terminatæ in O, O;

& propterea rectam OO parabolæ inſcriptàm eſſe, ad diametrum $a\pi$ ordinatim-poſitam. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XLVIII.

De Areâ Paraboloidis & Conoidis Pyramidoidiſve illi accommodati.

UT Archimedes (in lib. de *Quadratura Parabolæ*) oſtendit Parabolam (figuram putà lineâ Parabolica & rectâ contentam) eſſe ad Triangulum (ſuper eâdem vel æquali baſe æquè-altum) ut 4 ad 3: Sic & demonſtrari poteſt, Pyramidoides cubicale ad Triangulum (intellige, ſuper eâdem baſe æque-altum) eſſe ut 3 ad 2.

Item, ut Conoides Parabolicum ad Cylindrum (vel Pyramidoides Parabolicum ad Priſma) eſt ut 1 ad 2: Sic demonſtrari poteſt, Conoides a Paraboloide Cubicali ortum ad Cylindrum (vel ejuſmodi Pyramidoides ad Priſma) eſſe ut 3 ad 5.

Hæc autem alibi (Deo volente) inter ejuſmodi alia multa aliquando ſumus demonſtraturi. Atq; inſuper generalem methodum tradituri, quâ Paraboloidea quælibet ad Quadrata, & eorum Conoidea ſeu Pyramidoidea ad Cylindros aut Priſmata reduci poſſint non minus quàm ipſa parabola aut Conoides Parabolicum rectum, (quod & de Conoidibus & Pyramidoidibus Ellipticis & Hyperbolicis, ſive rectis ſive ſcalenis, intelligendum eſſe volo:) Quæ nemo, quod ſciam, antehac aggreſſus eſt.

PROP. XLIX.

De Paraboloidibus aliis.

SI Paraboloides Ordinatim-applicatas habeat in Diametrorum-interceptarum ratione ſubquadruplicatâ, vel ſubquintuplicatâ, &c; (in quibus

bus nempe Diametri-interceptæ ſunt Ordinatim-applicatarum biquadratis, vel ſurdeſolidis, &c, proportionales:) dici poterit *Paraboloides Biquadraticale*, vel *Surdeſolidale*, &c (nomine nempe rationi aptato.)

Latus-rectum ejuſmodi Paraboloidibus conveniens, appello rectam imaginariam; cujus, in Biquadraticalibus, Cubus in diametrum interceptam ductus æquatur Biquadrato Ordinatim-applicatæ; in ſurdeſolidalibus, Biquadratum in diametrum-interceptam ductum æquatur Surdeſolido Ordinatim-applicatæ: (& ſimiliter in aliis Paraboloidibus, reſpectu ſemper habito ad gradum Paraboloideos.) Ut ſit (prout gradus poſtulaverit) $p^4 = dl^3$, vel $p^5 = dl^4$, & ſic deinceps.

Habent autem & hæc Paraboloidea Diametros invicem parallelas; earúmq; Ordinatim-applicatas parallelas Tangenti in (ſuæ cujuſlibet) diametri vertice.

Recta verò AF (diametri continuatio inter verticem & tangentem intercepta) eſt, in Paraboloide Biquadraticali tripla, in ſurdeſolidali quadrupla, diametri interceptæ PA; (& ſimiliter in aliis:) Hoc eſt, continuata diameter PF (applicationis puncto & Tangentis concurſu intercepta,) eſt ad Diametri-interceptæ PA, in Biquadraticali quadrupla, in Surdeſolidali quintupla; & ſic deinceps.

Demonſtratio pari modo procedet atq; in Paraboloide Cubicali: aut etiam ipſa Parabolâ.

Adeo ut jam Paraboloidis Cubicalis, Biquadraticalis, ſurdeſolidalis, aut alíus cujuſvis, doctrina, non minus cognita habeatur quàm ipſius Parabolæ.

Si tamen, poſt ſpecimen hoc exhibitum, operæ pretium cenſebitur rem hanc fuſiùs proſequi, poterit illud a quolibet facillimè fieri cui tantum ſuppetit otii.

PROP.

PROP. L.

De Elliptoidibus & Hyperboloidibus.

DE Elliptoidibus & Hyperboloidibus (pariter atq; Paraboloidibus) in promptu erat nonnulla adjeciſſe; niſi quod eorum tractatio aliquantò intricatior eſſet, adeóq; fuſius tradenda, quam brevi appendiculo conveniret.

Sufficiat igitur (ſpecimine in Paraboloidibus exhibito) vel anſam aliis porrexiſſe, vel id ipſum forſan peculiari tractatu poſthac præſtiturum eſſe.

Interim, negotium a me primitus ſuſceptum, me ſatis præſtitiſſe non diffido.

LAUS DEO.

Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academia OXONIENSI,

ARITHMETICA INFINITORVM,

SIVE

Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata.

OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,

Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1655.

Clariſsimo Spectatiſsimoq; Viro

Matheſeos Peritiſſimo,

D. GULIELMO OUGHTREDO,

Eccleſiæ quæ eſt Aldeburiæ, in agro Surrienſi, Rectori. S.

EN tibi tandem (Vir Clariſſime) jam abſolutum opus illud cujus ſpem fecit Propoſitio ea Cyclometrica, quam ſub Paſchatis feſto Typis excuſam tibi dicavi. Quod cum, pro more, ubi in publicum prodeat, alicui inſcribendum ſit, non tam Virum magnum quam magnum Mathematicum quærendum putavi, cui illud inſcriberem. Adeoq; non alii cuiquam quam tibi magis illud deberi facile perſpexi; qui & a Matheſi optime meritus es, & cujus ſcriptis me profeciſſe lubens agnoſco: quippe qui in tua Clave Mathematicæ, opere licet non magno, ea breviter ſimul et perſpicuè tradidiſti, quæ magnis aliorum voluminibus fruſtra quæſitamus.

Opus hoc invenies (ſiquid ego judico) plane novum. Cur enim ita non vocitem nihil video: nec alii credo id inficias ibunt. Quamvis enim non dubitandum ſit, quin propoſitiones aliis cognitæ ſparſim immiſceantur, (quod neceſſario faciendum erat, partim ut inde ad alia lux affulgeat, neq; videar aliquid comminiſci, quod Matheſi jam inventæ atq; excultæ nihil habeat affine; partim etiam ne hoc ipſum opus mutilum prodiret & mancum, cùm illæ ex principiis noſtris ita ſtatim conſequantur ut etiamſi

amſt alias ignotæ eſſent neceſſe ſit ut hinc ſtatim innoteſcant; & quidem ex earum illuſtrioribus pleraſq; non apud alios prius ſciverim exſtare quam ad eas methodo hæc pervenerim:) cum tamen & nova multa, aliis nec inventa nec cogitata quidem, habeat; atq; omnia novâ methodo a nobis primitùs in Geometriam introductâ, tradat; eaq; (niſi mæis fortaſſe nimis faveam) perſpicuitate quâ in abſtruſioribus hiſce problematis nemo (quod ſciam) uſus eſt; Non eſt cur novum dubitem appellare.

Nempe inde ortum ſumit hæc noſtra methodus ubi Cavallerii methodus Indiviſibilium *deſinit. Unde etiam & operi ipſi, ipſiq; titulo, anſa data eſt; ut enim ille ſuam,* Geometriam Indiviſibilium, *ita Ego methodum noſtram,* Arithmeticam Infinitorum, *nominandam duxi.*

Quomodo autem ego huc pervenerim; licet id minus videatur dictu neceſſarium, cum omnia eâ fere methodo ſcripta ſint quâ inventa; tamen, quoniam id tibi non ingratum fore judico, iſtius etiam rei hiſtoriam breviter contexam.

Exeunte Anno 1650 *incidi in Torricellii ſcripta Mathematica, (quæ ut per alia negotia licuit, anno ſequente* 1651, *evolvi) ubi inter alia, Cavallerii* Geometriam Indiviſibilium *exponit. Cavallerium ipſum nec ad manum habui, & apud Bibliopolas aliquoties fruſtra quæſivi. Ipſius autem methodus, prout apud Torricellium traditur, mihi quidem eò gratior erat quòd neſcio quid ejuſmodi ex quo primùm fere Matheſem ſalutaverim animo obverſabatur; quod enim de circulo apud pleroſq; obtinet, (qui pro infinitorum laterum polygono haberi ſolet, adeoq; Peripheria pro rectis infinitis infinitè brevibus;) viſum erat mihi, mutatis mutandis, etiam alibi non inutiliter accommodari poſſe; & quidem eo*

ſpectare

ſpectare non pauca quæ apud Euclidem, Apollonium, & præſertim Archimedem paſſim exſtant. Erant autem ea non niſi confuſa adhuc apud me cogitata quæ nondum in ordinem redegeram. Neq; enim per alia licuit negotia, Matheſi animum ex profeſſo applicare, ſed ei ſaltem horis nonnunquam ſubciſivis indulgere; priuſquam aliunde ad hanc quam jam ſubeo provinciam vocatus fuerim; quod non ita multo priùs contigerat.

Ubi hujuſmodi jam obtinuiſſe methodum perſenſeram; cogitare apud me cepi, num non hinc aliquid de circuli quadratura, quam ſummos ſemper viros exercuiſſe votum eſt, luminis accedat. Quod ſpem facere videbatur, hoc erat. Infinitorum Coni circulorum, ad totidem Cylindri, ratio jam erat cognita, nempe ut 1 ad 3; eorum autem diametri omnes in triangulo per axem coni, ad totidem in parallelogrammo per axem cylindri, ſunt (uti notum eſt) ut 1 ad 2. Pariter in Conoide parabolico circulos omnes ad totidem in cylindro circulos notum erat rationem habere 1 ad 2; eorum autem omnes diametros ad diametros horum eſſe ut 2 ad 3. Manifeſtum etiam erat rectas trianguli eſſe Arithmeticè proportionales, ſive ut 1, 2, 3, &c. ergo circulos coni (in diametrorum ratione duplicata) ut 1, 4, 9, &c. Item circulos Conoidis parabolici (in duplicata ratione ordinatim-applicatarum, hoc eſt, in ratione diametrorum,) ut 1, 2, 3, &c. ergo eorũ diametros ut √1, √2, √3, &c. quippe in circulorum ſuorum ratione ſubduplicata. Fieri igitur poſſe ſperabam, ut aliàs etiam ex cognita ratione quam habeat ſeries circulorum, ſive (quod eodem recidit) quadratorum, ad totidem æqualia, inveniri poſſet & quam habent rationem eorum vel diametri vel latera ad æqualia totidẽ Hoc autem ſi univerſali aliqua methodo invenire poſſẽ, de circuli quadratura ſatis proſpectũ eſſet. Cum enim jam notum erat, parallelos omnes in ſphæra circulos, ad totidem in

Cylindro, esse ut 2 ad 3; si inde cognosci posset quam habeant omnes eorum diametri ad diametros horum, inventum foret quod quæritur: nempe Circulum illæ, hæ Quadratum diametri constituunt. Reducto ita problemate Geometrico ad purè Arithmeticum.

Huic igitur inquisitioni, istius anni 1651 *fine, & initio sequentis* 1652, *me applicui; ea plane methodo quam indicat hic Tractatus: opinatus vel inde constare aliquando posse quomodo quadrandus esset circulus, vel forte ne quidem quadrandum esse, vel saltem aliquid hinc emersurum esse quod operæ esset pretium.*

Aggressus igitur sum primo (ut a simplicioribus inchoem) series simplices, puta quantitatum Arithmeticè proportionalium, vel in earum ratione duplicata, triplicata, &c. deinde & subduplicata, subtriplicata, &c. atq; ex his composita, puta, subduplicatæ triplicata, &c. aut etiam qualitercunq; multiplicata, vel juxta denominationem rationalem aut etiam irrationalem. In quibus omnibus res plane quidem ex voto & supra spem successit. Unde Theorema tandem generale emersit, Prop. 64. *traditum. Sed & quadraturam simul reperi non modo Parabolæ novæ methodo præstandam, sed & Paraboloidum omnium, eorumq; complementorum, quod nemo antea, quod sciam, aggressus erat; nedum assecutus. Adeoq; hinc statim Geometriam auctam persensi; cum enim antea ex figuris curvilineis sola fere parabola quadraturam nacta erat, jam paraboloidum omnium infinita genera unâ quidem & generali methodo unica propositio quadranda doceat. Et quidem si unius Parabolæ quadratura Archimedem tantum nobilitaverit, (ubi omnes deinceps Mathematici ex eo tempore substiterunt tanquam ad Herculis columnas,) gratum illud orbi Mathematico futurum satis præsensi, si etiam ejusmodi figurarum infinita genera quadranda docerem. Sed & Conoidum item & Pyramidoi-*

dum

dum doctrinam hinc ampliatam vidi. Cum enim Archimedes ex Conoidibus & Sphæroidibus ſola recta tractaverit (ut & poſt illum alii) de Pyramidoidibus ne quidem mentione facta; ego illa omnia ſive Conoidea ſive Pyramidoidea tam recta quam inclinata ad Cylindros & Priſmata redegi. Nec ea tantum quæ ex Parabolis, ſed & quæ ex Paraboloidibus omnibus eorumve complementis formantur, de quibus altum hucuſq; apud omnes ſilentium, nec quicquam (quod ſciam) uſpiam tentatum. Sed & totam fere de Spiralibus doctrinam hinc etiam vidi directâ poſſe conſequentiâ derivari: Et quidem non modo ſpatia ſpiralibus adjacentia (quod fecit Archimedes) cum circulo comparanda docui, ſed & lineam ipſam ſpiralem cum peripheria, quod nemo antehac (quod ſciam) aggreſſus eſt, nedum præſtitit. Et propterea ſiquis ſpirali rectam æqualem dederit (quod aliqui ſe feciſſe ſomniarunt) Peripheriam item utrivis æqualem datam iri non dubito; adeoq; & circuli quadraturam vel ſic perfectam eſſe. Sed & ipſam ſpiralium doctrinam, non minus quam Parabolarum & Paraboloidum, ampliaſſe proclive erat, niſi quod nollem ad Corollaria nimis exſpatiari.

Tranſii deinde ad ſeries auctas (quas voco) & diminutas ſive mutilatas; quæ ex duarum pluriumve ſerierum vel aggregatis vel differentiis conſtant. Atq; hic etiam ſucceſſum minime contemnendum reperi. Nempe eas omnes ad ſeries æqualium redigere non erat difficile; adeoq; Conoidea & Sphæroidea, vel etiam Pyramidoidea, non modo recta ſed & inclinata, ad Cylindros & Priſmata redigere rem nullius eſſe negotii perſpexi: neq; ea tantum quæ ex Hyperbolis & Ellipſibus fiant, ſed & quæ ex Hyperboloidibus vel Ellipſoidibus mille modis formari poſſent; verum eis ſigillatim recenſendis immorandum eſſe non duxi, ne nimis evagarem, præſertim cum illud qui fieri poſſit nemo non ex traditis ſuo marte perſpiciat.

De

De seriebus autem istis sive auctis sive diminutis non ipsis solum, sed & quæ in earum ratione duplicata, triplicata, aut ulterius multiplicata procedunt, eandem inquisitionem eodem successu continuavi; uti ex iis quæ deinceps sequuntur propositionibus videndum est. Ubi simul numerorum figuratorum, puta triangularium, pyramidalium, &c. (quorum nullus vel exiguus hactenus usus fuerit, & fere ludicrus,) usus insignes ex insperato deteguntur.

Verum ubi de seriebus aliis quæ sint in istarum auctarum vel diminutarum ratione subduplicatâ, subtriplicata, &c. proximè agendum erat, (quod Circuli, Ellipseos, & Hyperbolæ quadraturam directè quidem & immediate spectabat, & quæ sola jam superfuit difficultas:) videbam illic aquam hærere, neq; ita facilè ac in prioribus me extricare posse. Re igitur variis modis tentata, nec eo tamen exitu qui votis omnino satisfaceret; eo deventum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejusmodi esse quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus surdis esset explicabilis. Numerorum enim progressiones aliquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quæsitam valeam exprimere. Eas autem progressiones tales esse ut nec Arithmeticæ dici possint (ubi augmenta continua sunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes sunt æquales,) sed tales quæ continuos multiplicatores habeant arithmetice proportionales, adeoq; magis adhuc sint compositæ quam Geometricæ. Si autem in Geometrica progressione, (ubi continui multiplicatores sunt æquales,) quamvis aliquando fieri possit (verbi gratia, in 1, 4, 16, 64, &c.) ut interpolandi terminis illius medii sint numeris explicabiles, non item in omnibus (puta in 1, 2, 4, 8, &c.) id fieri possit, sed necesse sit ut numerum impossibilem ut-

cunq;

indicemus, (puta √2, √8, &c:) multò minus sperandum fore judicavi, ut in progressione magis adhuc composita (ubi continui multiplicatores sint continuè vel crescentes vel decrescentes) id semper fieri possit; adeoq; alium aliquem notationis modum (quam qui adhuc receptus est) inducendum putavi quo numerus ille impossibilis indicetur.

Atq; hactenus perveneram istius anni 1652 *initio, tempore (si memini) quadragesimali; quo tempore nempe, per Academiæ nostræ constitutiones, a publicis prælectionibus feriari permissum est, adeoq; privatis disquisitionibus magis vacare.*

Dum autem hic hærebam, placuit rem aliis quibus familiariter usus sum viris Mathematicis communicare, ut videam num illi auxilio esse possint in quæsita quantitate designanda. Adeoq; ex variis quas apud me conceperam ejusmodi progressionibus, unam selegi, quæ omnium videbatur simplicissima, (ut quæ per numeros integros procedit;) eam nempe quæ jam habetur prop. 192. *hujusce tractatus; eamq; ad hanc fere formam (non enim omnibus illam iisdem plane verbis, sed eodem tamen sensu proposui) problematicè concepi;* Si æquabilem quandam curvam contingat in vertice recta unde ad curvam ducantur rectæ axi Parallelæ, æqualibus ab invicem distantiis remotæ, quarum prima sit 1, secunda 6, tertia 30, quarta 140, quinta 630, &c; quanta erit illa quæ interponenda est media inter 1 & 6? *Vel etiam Arithmeticè,* In serie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. quæritur terminus medius ipsis 1 & 6 interponendus? *Fieri autem hos terminos indicabam, ex continua multiplicatione numerorum* $1 \times 4\frac{2}{1} \times 4\frac{3}{2} \times 4\frac{4}{3} \times 4\frac{5}{4}$ &c. *vel etiam* $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$ &c. *quorum tam numeratores quam denominatores sunt Arithmetice proportionales. Problema sic conceptum proposui, mensibus sequentibus (inter alios)*

Clarissimis viris & Mathematicis, D. Setho Wardo *Astronomiæ Professori Saviliano, Collegæ meo meritissimo;* Laurentio Rook, *tunc apud Oxonienses commoranti, nunc apud Londinenses in Collegio Gresshamensi Professori Astronomico;* & Richardo Rawlinson *Collegii Regnalis apud Oxonienses Socio; nescio annon etiam sub eodem tempore, (an aliquanto serius)* Roberto Wood *Socio Collegii Lincolnienſis, &* Christophoro Wren *Collegii Omnium-Animarum nunc Socio; (sed & aliis etiam aliquot, quibus nominandis supersedeo:) & quidem detecto iis (ni fallor) omnibus eo ad quem tendebat scopo; nempe, datâ illâ quæ quærebatur quantitate absolutam fore quadraturam Circuli. Non autem vel ego mihi vel etiam eorum quispiam (quibus nec erat obvium responsum, nec vacabat suis postpositis de quæsitis meis admodum esse solicitis,) ex voto satisfecit. Monuit autem eorum aliquis ut* Gregorii a Sancto Vincentio *Opus Geometricum consulerem (cujus ne nomen quidem antea audiveram) ut qui magno volumine hujusmodi res quæ ad circuli Quadraturam spectent exposuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumq; utut tanto erat volumine ut non integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcunq; & solicitus an inde quæ ad rem nostram facerent reperire possim. Inveni autem aliquando easdem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) speculationes obtigisse, licèt diversis methodis eo pervenerimus. Exempli gratia, Prop. 15. nostra apud illum (si memini) alicubi occurrit: at tamen scrupulum illum quem ibidem in Scholio indicavimus, ille vel dissimulat, vel (quod potius putaverim) non animadvertit, nec memini an sensu nostro illam intelligat necne. Item, quod appellat ille* plani in planum ductum, *id ipsû est quod nos et hic, et in Tractatu de Conicis Sectionibus (qui huic gemellus est eodem anno* 1652 *conceptus & primitus*

primitùs formatus) dicitur, ductus rectarum omnium unius plani in alterius reſpectivas rectas: *cur autem ego* ductum plani in planum *non dixerim, in cauſâ erat, quòd revera non tam planum in planum (ſic enim prodiret plano-planum, quatuor nempe dimenſionum, non ſolidum,) ſed latitudo unius in latitudinem alterius, & factum deniq; in communem altitudinem ducitur; adeoq; tres (non quatuor) emergunt dimenſiones. Et alia fortaſſe nonnulla. Ut autem ex ſuis ne unam vel propoſitionem vel demonſtrationem in noſtrum tractatum aſſumpſi, quam ego antea non inveneram; ita ſiquæ forſan occurrant utriq; communes, non opus eſſe credidi, ut propterea ex noſtris delerem, cum & illud ſæpiſſimè contingere ſit neceſſe, ut ubi duo vel plures rem eandem tractandam ſuſcipiant in eaſdem aliquando incedant ſpeculationes. Verum (utut ille multa habeat acutè inventa, methodo a noſtra plane aliena) illud quod apud eum maximè quærebam nuſquam inveni; neq; enim ille vel eouſq; rem perduxerat, nec etiam circuli quadraturam, quam ſe inveniſſe prohibet, omnino attingit, ſed ad propoſitionem noſtræ prop.* 136. *non multum abſimilem ubi pervenerat, ratus inde ſe circuli quadraturam inveniſſe, non tamen aſſecutus eſt; uti in* Ἐξετάσει *ſua oſtendit* D. Hugenius.

Sub ejuſdem anni (1652) *autumno, Clariſſimo Viro* Franciſco Schotenio *Matheſeos Profeſſori apud Lugduni-Batavos, inter alia, propoſui etiam hoc problema, (tecto tamen quo collimabat ſcopo;) qui, re ſtatim cum Clariſſimo Viro* Chriſtiano Hugenio *communicata, reſcriptis non ita multò poſt literis intricatam rei difficultatem (utut primo aſpectu facilior viſa fuerit) ſubindicavit, neqùe interim ſpem fecit vel ſibi vel Dom.* Hugenio *vacaturum fore ut ei ulterius exquirendæ plus operæ impen-*

dant. His eorum omnium responsis, confirmatior factus sum in ea quam pridem conceperam opinione, nempe terminum illum quæsitum neq; numerum rationalem esse, neq; ex adhuc receptis surdis aliquem; sed nova notatione designandum; & quidem, si libet, eâ quam nos ad prop. 190. assignavimus. Si vero (prout verbi gratia √2, licet veris numeris exprimi præcisè non possit, possit tamen quam proximè, ita) velimus hanc quantitatem veris numeris quam proximè exprimere, (tanta nempe ἀκριβεία quanta quis velit, modò præcisam non velit,) quomodo illud fiat docemus prop. 191. Quomodo illud Geometricè utcunq; exhibeatur, ostensum est item propositionibus sequentibus. Adeoq; circuli quadraturam eousq; prosequuti videmur quantum numerorum natura patitur. Qui vero ulterius rem præstare postulat, perinde est ac si postulet √2 veris numeris exprimere: quod iniquum esset postulatum. Non interim ignoro quin possit & aliis etiam modis inexplicabilis illa quantitas characteribus designari, atq; ad numeros veris proximos aliis item methodis perveniri, (sicut & de radicibus surdis dici possit,) qua in re non est ut ego viris Mathematicis quicquam præscribam, sed quibus quisq; malit uti liberum relinquam.

Absoluta autem circuli quadratura, non opus esse duxi cognata illi alia problemata sigillatim attingere; puta quam habeat rationem diameter ad peripheriam; aut sphæra ad cubum; aut conus vel cylindrus ad pyramidem aut prisma; aliaq; similia: nemo enim nescit hæc inde colligere.

Sed neq; de quadratura Ellipseos seorsim quicquam dicendum videbatur; quippe quæ junctim cum quadratura circuli traditur.

Hyperbolæ quadraturam quousq; fuerim assecutus, prop. 165. ostendimus.

Interim

Interim tamen, methodi quam trado filum secutus, inopinato incidi in quæstionem satis mirabilem de mensurandis figuris altera parte terminatis altera in infinitum continuatis. Adeoq; quod in una figura solida præstitit Torricellius, id nos in aliis infinitis tam planis quam solidis faciendum ostendimus, prop. 87. & seq. ad 107. Et simul docemus quo dignoscatur criterio num ejusmodi figuræ propositæ in infinitum continuatæ finitam tandem an infinitam magnitudinem sint assecuturæ. Quæ quidem & miranda satis, & jucunda simul, videatur speculatio.

Quod autem jam ante tres annos invenerim, cur non citius in publicum dederim; in causa fuit partim quod ego aliis non rarò negotiis fuerim avocatus, sed præsertim quod Typographus, aliis edendis occupatior, non nisi serius susceperit & tardius exsecutus sit & hujus & aliorum qui cum hoc prodeunt tractatuum impressionem. Quam verò, dum quæ jam prodeunt sub Prelo erant, placuit (sub æquinoctio verno) quasi in antecessum emittere, propositionem Cyclometricam, (quæ & eam continet, quam ante aliquot annos sub problematis forma, ut supra dictum est, egregiis aliquot viris proposueram,) invenies ex tribus illis quæ hunc tractatum claudunt desumptam esse. Ex eo autem tempore, (mense jam proximè præterito) prodiit Libellus D. Hobbes; qui jam magna pollicitus in Geometria, & speciatim circuli quadraturam angliq; in datâ ratione sectionem, aliaq; his cognata, Libellum tandem suum in publicum emisit, quo se ostendit nec horum quicquam præstitisse, nec quidem præstiturum esse; adeo enim turpissimis paralogismis ubiq; scatet Libellus iste, ut rarò aliquando quid sanum invenias, (quod nostro istius Elencho, qui & jam sub Prelo est, manifestum fiet;) unde & Authorem non eum esse facile

facile dignoſcas a quo hujuſmodi myſteria ſperemus retexenda.

Cæterum vale, Venerande Senex: Et te Deus ſumme miſericors feliciter ſoſpitet, tuaq; omnia faxit proſperaz ut tandem, poſt Senium Feliciter & Piè tranſactum, aerumnoſam quam vivimus vitam vitâ commutes meliori. Quod animitus precatur

Tui Obſervantiſſimus

Dabam Oxoniæ
Julii 19. 1655.

JO: WALLIS.

Propoſitio quam memorat Epiſtola præcedens hæc eſt quæ ſequitur.

SPECTATISSIMO VIRO

D. GULIELMO OUGHTREDO,

Matheseos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. OXON. S.

QUam tibi antehac (Celeberrime Vir) Propositionem, velatâ facie, & formâ Problematicâ; ut & aliis, quibuscum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celato plerumq; (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur scopo: En tandem apertâ fronte, formâ Theorematicâ, eloquentem (quam priùs subticebat)

Circuli Quadraturam.

EXpositâ æquabili curvâ VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales divisa, &, à singulis divisionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam usq; ductis, quarum secunda sit 1, quarta 6, sexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum secunda ad tertiam, sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$ sexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic Circulus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1, quarta $2\frac{1}{2}$, sexta $4\frac{1}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonstrationis progressum, ipsamq; methodum quâ tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, ostendet tractatus quem apud me jam aliquandiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum usum exscriptum, quem in publicum daturus sum, quam primum per Typographorum moras licebit; quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jamjam expectavi.

Dabam è Typographéo *Oxoniensi* postridie Paschatis,
Anno Dom. 1655.

V
1
6
30
140
630
T
V
1
3/2
15/8
105/48
945/384
T
C
V
1
5/2
35/8
315/48
3465/384
T
X
C

Arithmetica Infinitorum.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI

in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; *difficiliora Matheſeos Problemata.*

PROP. I. *Lemma.*

SI proponatur ſeries Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (ſive juxta naturalē numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel 0 (ciphra, ſeu nihilo) inchoatarum, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4. &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simpliciſſimus inveſtigandi modus, in hoc & ſequentibus aliquot Problematis, ei[illegible] rem ipſam aliquousq; practicare, & rationes prodeuntes obſervare atq; invicem comparare; ut inductione tandem univerſalis propoſitio innoteſcat.

Eſt igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6+6}=\frac{21}{42}=\frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet pregrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla. Adeóq; ....

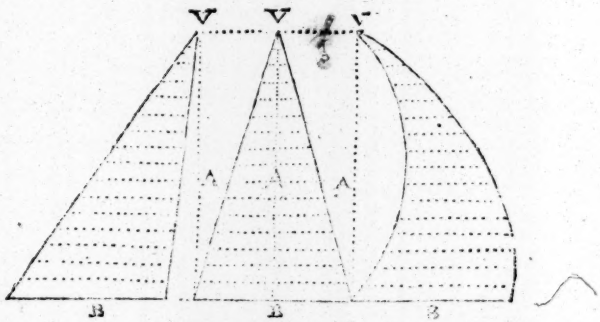
PROP. II. *Theorema.*

SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit,) erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, ſi primus terminus ſit o, ſecundus 1, (nam ſi ſecus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus *l* erit ſumma $\frac{l+1}{2}\,l$. (erit enim, eo caſu, numerus terminorum $l+1$.) vel, (poſito numero terminorum *a*, quantuſcunq; ſit terminus ſecundus) $\frac{1}{2}\,al$.

PROP. III. *Corollarium.*

ERgo, *Triangulum ad Parallelogrammum (ſuper æquali baſe, æquè altum,) eſt ut* 1 *ad* 2.

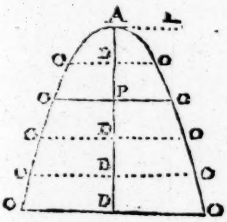


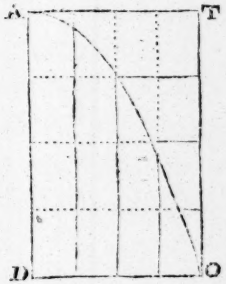
Triangulum

Triangulum enim conſtat quaſi ex infinitis rectis parallelis Arithmeticè proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima eſt baſis, (ut oſtendimus ad pr. 1, & 2. libri noſtri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem baſi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc eſt ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonſtrandum.

PROP. IV. *Corollarium.*

ITem, *Pyramidoides vel Conoides Parabolicum (ſive erectum ſit ſive inclinatum,) ad Priſma vel Cylindrum (ſuper æquali baſe, æque-altum,) eſt ad 1 ad 2.*





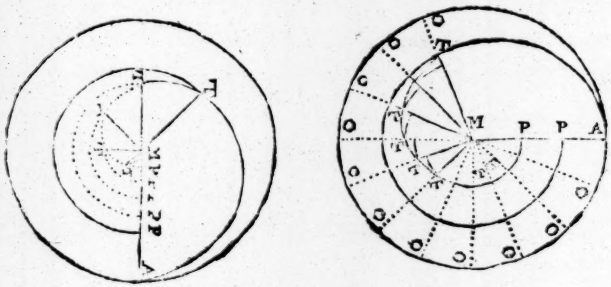
Conſtat enim Pyramidoides vel Conoides Parabolicum quaſi ex infinitis planis Arithmetice-proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima eſt baſis, (ut oſtendimus prop. 9. Con. Sect.) Priſma verò vel Cylindrus ex totidem baſi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc ut 1 ad 2, per prop. 2.

PROP. V. *Corollarium.*

ITem, *Linea Spiralis quælibet MT (a Spiralis Principio exorſa) ad correſpondentem Peripheriæ arcum*

conterminum P T (*a Principio circulationis exorsum,*) *est ut* 1 *ad* 2.

Esto enim Linea Spiralis (una circulatione facta) M T A, Principium Spiralis M, (quod idem esto & centrum Arcûs Peripheriæ, quem correspondentem voco,) Principium circulationis recta M A, quæ æquabili motu circumducta (manente puncto M) supponitur puncto suo A peripheriam describere AO A (qui *Circulus primus* vel potius *Circuli primi Peripheria*, di-



Spiralis in utraq; figura continuanda erat integra ad medium usq; sed, per Cælatoris incuriam, in altera manca est, in altera intercisa.

ci vel solet vel commode potest,) dum interim punctum aliquod (in eadem recta circumducta) moveri supponitur (æquabili item motu) ab M ad A, motu suo lineam Spiralem MTA describens: Adeóq: recta quælibet MT (a principio spiralis M, ad spiralem ubivis ducta) erit ad rectam MA, ut peripheriæ arcus AO (eodem tempore descriptus) ad peripheriam totam AOA, vel ut angulus AMT ad quatuor rectos: Adeoq & rectæ MT, MT, arcubus AO, AO, proportionales erunt, ut patet.

Tum, ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos AMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus (adeoq; arithmeticè proportionalibus) supponamus (super illis angulis) similes Sectores totidem (saltem uno minus, quia in spacio primo sector inscribi non poterit) figuræ MTM (spirali MT & rectâ TM comprehensæ) inscribi. Sectores illi omnes constituent

ſtituent figuram (ex ſimilibus ſectoribus compoſitam) ipſa figura MTM (cui inſcribitur) minorem: Differentia verò perpetuo minuetur prout ſectores illi (eidem MTM figuræ inſcripti) plures fuerint, (ut patet,) adeò ut, ſi ſectores illi ſupponantur infiniti, figura ſic inſcripta ipſi MTM figuræ congruet, (per ea quæ univerſaliter monuimus ad prop. 2. Con. Sect.) & propterea ſectorum illorum omnium arcus ipſi ſpirali MT congruent.

Sunt autem illi ſimilium ſectorum arcus (ſicut eorum radii) arithmeticè proportionales, nempe ut 0, 1, 2, &c. angulus autem cujuſlibet ſectoris eſt ea pars anguli totius AMT quæ ſectorum ſive ſpaciorum numero cognominis eſt; adeoq; ſi ſectores ſupponantur infiniti, erit angulus cujuſlibet $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitè parva) anguli totius AMT, ita nempe ut omnes ſimul æquentur toti AMT. (Liceat autem mihi, κατα χρησικως forſan, Anguli nomine appellare angulorum etiam aggregatum, quamvis fortaſſe duos rectos vel æquet vel etiam ſuperet.)

Spiralis igitur MT conſtare ſupponitur ex infinitis ſectorum arcubus arithmeticè proportionalibus, (ſubtenſis $\frac{1}{\infty}$ anguli AMT,) quorum minimi radius eſt 0, ſeu punctum, (nullius magnitudinis,) maximi vero recta MT.

Correſpondens autem arcus conterminus PT, ex totidem conſtat ſectorum arcubus maximo æqualibus, ut patet.

Ergo aggregatum illorum (hoc eſt linea ſpiralis MT) ad aggregatum horum (hoc eſt arcum conterminum PT) eſt ut 1 ad 2. per prop. 2.

PROP. VI. *Corollarium.*

ET propterea, *Linea ſpiralis MA unâ circulatione facta æquatur ſemiſſi peripheriæ circuli primi, AA.*

Nam arcus conterminus ſpirali MA, eſt integra peripheria circuli primi puncto A deſcripta. Ideoq; &c. pro prop. 5. quod erat demonſtrandum.

PROP. VII. *Coroll.*

ET *Spiralis deſcripta circulationibus duabus, tribus, quatuor, &c. integris; æquatur ſemiſſi peripheriæ circuli ſecundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c. ſumptæ.*

In figura ſequente.

Nam dum deſcribitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta) Punctum illud B, peripheriam BB bis deſcribit: & dum deſcribitur ſpiralis MABC, peripheria CC ter deſcribitur; & peripheria DD quater, dum deſcribitur ſpiralis MABCD. Et ſic deinceps, pro numero circulationum multiplicanda eſt peripheria contermini circuli, & multipli ſemiſſis æquatur ſpirali interea deſcriptæ.

PROP. VIII. *Coroll.*

SI vero *Spiralis ultra circulationem primam, ſed non duabus integris continuetur, æquabitur ſemiſſi tam peripheriæ integri circuli contermini, quam ejuſdem continuationis ſupra circulum integrum.*

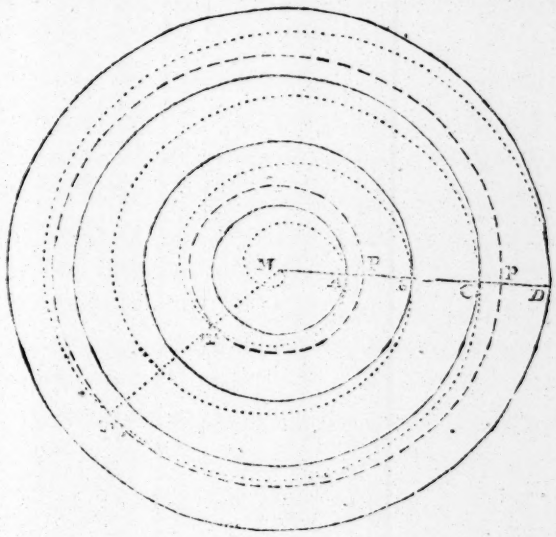
Nam interea dum deſcribitur (motu compoſito) Spiralis MAT, deſcribetur etiam (a puncto P) arcus PPT, nempe tota peripheria PP cum adjuncto additamento PT. Ergo &c. pro prop. 5 Quod erat demonſtrandum.

PROP. IX. *Coroll.*

ET pariter, *Si ſpiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; æquabitur illa ſemiſſi conterminæ peripheriæ integræ, bis, ter, quater, aut ſæpius acceptæ (pro numero nempe integrarum circulationum) cum ſemiſſe item additamenti.*

Quia

Quia nempe dum ſpiralis illa deſcribitur, toties deſcribitur peripheria contermina integra, atq; inſuper additamentum: Hoc eſt, correſpondens arcus conterminus continet totidem in-



tegros circuli ambitus (quot ſunt integræ circulationes) cum additamento. Ideoq; conſtat propoſitum, per prop 5.

PROP. X. *Corollarium.*

ATq; inſuper, *Lineæ Spirales unâ, duabus, tribus, quatuor, &c. circulationibus factæ, (puta MA, MAB, MABC, MABCD, curvæ) ſe habent ad invicem ut numerorum Arithmetice-proportionalium quadratas nempe ut* 1, 4, 9, 16, *&c. Sive ſunt in duplicata ratione rectarum* MA, MB, MC, MD, *&c.*

Sunt

Sunt enim rectæ MA, AB, BC, CD, invicem æquales (propter æquabilem progressum puncti mobilis in rectâ MA, etiam continuatâ, tantum in una circulatione æquabiliter progredientis quantum in altera;) adeóq; tam radii MA, MB, MC, MD, quam Peripheriæ (illis radiis descriptæ) A, B, C, D, sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4. Si igitur sumantur peripheriæ, prima semel, secunda bis, tertia ter, quarta quater, erunt illa multipla, (puta 1 A, 2 B, 3 C, 4 D,) ut numeri quadrati 1, 4, 9, 16, sive 1×1, 2×2, 3×3, 4×4. Et propterea etiam horum multiplorum semisses, hoc est (per prop. 5.) spirales MA, MAB, MABC, MABCD.

Vel aliter, si circuli primi peripheria ponatur $A=p$, erit secundi $B=2p$, tertii $C=3p$, quarti $D=4p$, & sic deinceps; & $1A=1p$, $2B=2\times2p=4p$, $3C=3\times3p=9p$, $4D=4\times4p=16p$; &c. Et (per prop. 5) Curvæ spirales $MA=\frac{1}{2}p$, $MAB=\frac{3}{2}B=\frac{4}{2}p$, $MABC=\frac{3}{2}C=\frac{9}{2}p$, $MABCD=\frac{4}{2}D=\frac{16}{2}p$, &c. ideoq; ad invicem ut 1, 4, 9, 16, &c. hoc est in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c. (quæ sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4, &c.) Quod erat demonstrandum.

PROP. XI. *Coroll:*

ET universaliter; *Ejusdem (vel similium) spiralis segmenta quælibet (a principio spiralis exorsa) sunt ad invicem in duplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (anguli voce eo sensu sumpta qui supra innititur prop. 5.) ratio arcuum PT, PT, (quæ ex duabus illis rationibus componitur) ut & curvarum MT, MT, (quæ illorum arcuum sunt similes) erit duplicata rationis rectarum MT, MT, seu ut MTq, MTq.

Sic v.g. si recta MA (unius circulationis) dicatur $1r$, & peripheria circuli primi (eo radio descripta) $1p$, erit spiralis $MA=\frac{1}{2}p$. Igitur, in una circulatione cum semisse, fiet recta conterminа $1\frac{1}{2}r=\frac{3}{2}r$, & peripheria conterminі circuli $\frac{3}{2}p$, quæ

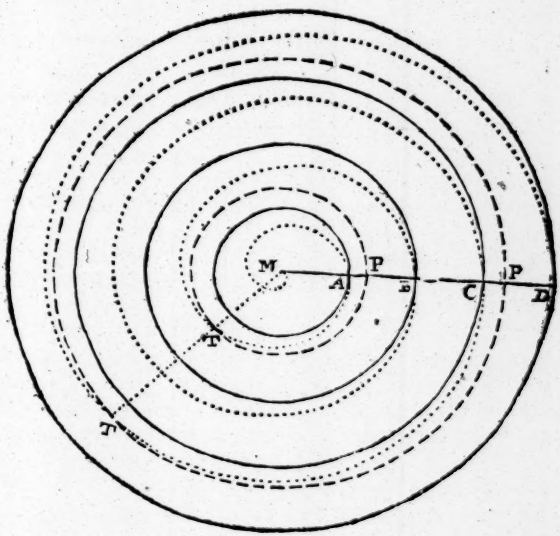
ducta

ducta in $\frac{1}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * p = \frac{2}{4}p$: Ejuſq; ſemiſſis $\frac{9}{2*4}p = \frac{2}{8}p$ eſt linea ſpiralis eodem tempore deſcripta.

Similes *autem appello lineas Spirales, ſi rectæ MA, MB, MC, &c. in unâ, æquales ſint homologis rectis in altera.*

PROP. XII. *Corollarium.*

SI vero ejuſmodi ſpiralium diſſimilium (puta ſi MB in unâ, tanta ſit quanta MC in alia) rectæ conterminæ ſint æquales; erunt ſpiralium illarum ſegmenta homologis ſuis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciprocè proportionales.



Nam v.g. in primâ, erit ſpiralis MAB (duabus circulationibus

nibus descripta) æqualis semissi peripheriæ suæ B, bis sumptæ; & in secunda, Spiralis MABC (tribus circulationibus descripta) æqualis semissi suæ peripheriæ C ter sumptæ: Cúmq; supponantur æquales peripheriæ B in primâ, & C in secunda, (propter æquales radios;) erunt spirales MAB prima, & MABC secunda, ad invicem 2 ad 3, (nempe ut peripheria b bis sumpta, ad eandem vel æqualem ter sumptam;) hoc est, in reciprocâ ratione rectarum homologarum MA, MA: Nam recta MA in primâ est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & recta MA in secundâ est $\frac{1}{3}$ (ejusdem vel æqualis rectæ) MC: sunt igitur MA in secunda ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut $\frac{2}{6}$ ad $\frac{1}{6}$, vel ut 2 ad 3. Ideoq; Spiralis prioris segmentum MAB, ad spiralis posterioris segmentum MABC, ut recta MA in secunda ad rectam MA in primâ.

Arq; idem similiter ostendetur, quæcunq; sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XIII. *Corollarium.*

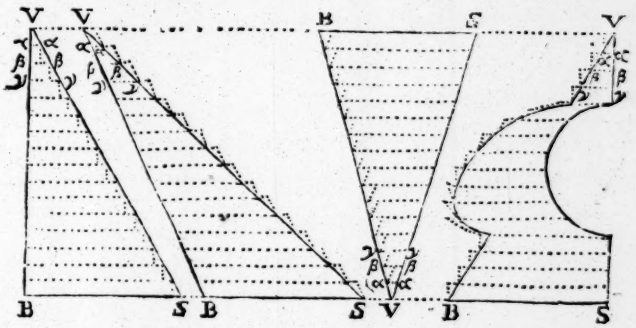
SI autem ejusmodi spiralium dissimilium rectæ conterminæ sint etiam inæquales; erunt illæ spiralium segmenta adinvicem in eâ ratione quæ componitur ex duplicata ratione rectarum conterminarum, & reciprocâ ratione rectarum homologarum.

Sequitur ex prop. 11. 12.

SCHOLIUM.

Notandum autem est, in propositionibus præcedentibus, quæ de linea Spirali agunt (quod & in secuturis aliquot facturus sum) me *lineæ Spiralis* appellationem (ne longa circumlocutione toties opus sit) abusive usum fuisse. Nempe, per *lineam Spiralem*, (quoties ea ad Peripheriam comparatur,) intellectum vellem *Aggregatum omnium arcuum Sectorum similium, numero infinitorum, ex quibus constat figura illa ex infinitis numero Sectoribus Spirali inscripta*; (qua scilicet & nos ad Prop. 5. &c. hujus, & Archimedes ad Prop. 21. &c. lin. spir. usi sumus:) ut ad prop. 5. innuimus. Quod quidem Aggregatum ipsa linea Spirali proprio sensu sumpta, perpetuò minus est, & maxime quidem circa spiralis

ralis initium. Quamvis enim Sectorum illorum numero infinitorum aggregatum, ipſi figuræ lineis recta & Spirali terminatæ, (juxta methodum Indiviſibilium) æquale ponatur; non tamen illud de omnium Arcubus cum ipſa Spirali (propriè dicta) comparatis obtinebit. Tantundem enim eſſet, acſi quis, dum infinita numero parallelogramma triangulo inſcripta (aut etiam circumſcripta) toti triangulo VBS æqualia videat, inde



concluderet eorum omnium latera rectæ VS adjacentia (rectæ VB parallela) ipſi VS ſimul æqualia eſſe, vel quæ rectæ VB adjacent (ipſi VS parallela) æqualia ſimul eſſe toti VB. (Quod ſiquando verum eſſe contingat, puta in triangulo iſoſceli, non tamen id univerſaliter concludendum erit.) Atq; hoc quidem eo potius admonendum duxi, quod viderim etiam viros doctos nonnunquam ſpecioſa ejuſmodi veriſimilitudine in lapſum proclives eſſe. Cur autem omiſſa Spirali genuina, ſpuriam hanc peripheriæ comparaverim; cauſa eſt, quod huic poſſim, non autem illi, æqualem peripheriam aſſignare.

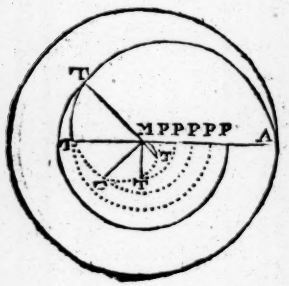
PROP. XIV. *Corollarium.*

ET propterea etiam *ſegmenta ſpiralis, a principio ſpiralis exorſa, ſunt ad rectas conterminas, ſicut Parabolæ Diametri interceptæ, ad ordinatim-applicatas.*

Nempe in ratione duplicatâ, per prop. 11.

PROP. XV. *Coroll.*

Ideo si supponatur Spiralis nostra MTT ita evolvi, ut rectam constituat, & rectæ omnes TM, TM, fiant invicem parallelæ; erit illa, Diameter, hæ verò, ordinatim-applicatæ in Parabola: Contra vero, si supponatur Parabolæ diameter ita in arcus convoluta, ut ordinatim-applicatæ ad idem punctum terminentur; fiet illa, Spiralis; istæ, rectæ conterminæ; hoc deniq;, principium Spiralis.



SCHOLIUM.

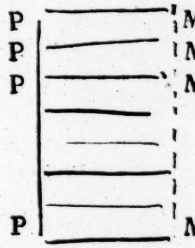
Atq; hinc etiam ulterius patet illud quod post prop. 13. indicavimus. Nempe, Spiralem illam nostram ex infinitis similium Sectorum arcubus conflatam, non esse genuinam Spiralem propriè dictam, sed ipsa minorem. Cum enim constet, in parabola, ordinatim-applicatas, quæ vertici propiores sunt quam ea quæ lateri-recto æquatur, longiores esse quam sunt diametri-interceptæ; adeoq; non ita convolvi posse parabolæ diametrum (dummodo infracta maneat) ut earum ordinatim-applicatarum extremitates in ipso vertice coeant, (quippe quod, quæ jam curvata supponitur, minor esse non possit, quam recta conternina, quæ prius erat ordinatim-applicata:) Necesse est ut vera Spiralis, quæ sic convoluta est, major sit quam ea quæ supponitur ex arcuum aggregato conflari, quam Parabolæ diametro convenire jam ostensum est, quippe quæ est ubiq; in duplicata ratione rectarum conterminarum.

PROP.

PROP. XVI. *Coroll.*

PArabola vero ſic convoluta (hoc eſt, figura Spirali noſtræ adjacens) eſt ejuſdem Parabolæ evolutæ ſemiſſis.

E enim v. g. Si ſupponamus parallelogrammi PM latus PP ita convolvi, ut rectarum omnium PM puncta M in eodem puncto coeant, fiat ex Parallelogrammo (propter radios omnes a communi centro M æquales) circuli ſector (qui circulo integro vel minor erit vel major vel æqualis, pro ea ratione quam ad invicem habeant rectæ PP, PM;) qui quidem Sector (hoc eſt Parallelogrammum convolutum) erit Parallelogrammi (evoluti) Semiſſis; (propterea quod pro infinitis Parallelogrammis ex quibus Parallelogrammum expoſitum conſtare ſupponitur, fiunt totidem in Sectore triangula eaſdem & baſes & altitudines habentia:) Pari modo, ſi ita convolvetur Parabola ut dictum eſt, & ordinatim-applicatarum (pridem parallelarum) extrema altera in eodem puncto coeant; infinita illa parallelogramma ex quibus conſtare ſupponimus planum parabolæ (per ea quæ diximus ad prop. 2. & 8. Con. Sect.) fient totidem triangula eaſdem & baſes & altitudines (cum illis parallelogrammis) habentia: & propterea Parabola ſic convoluta (hoc eſt, figura Spiralis,) ipſius evolutæ ſemiſſis erit.

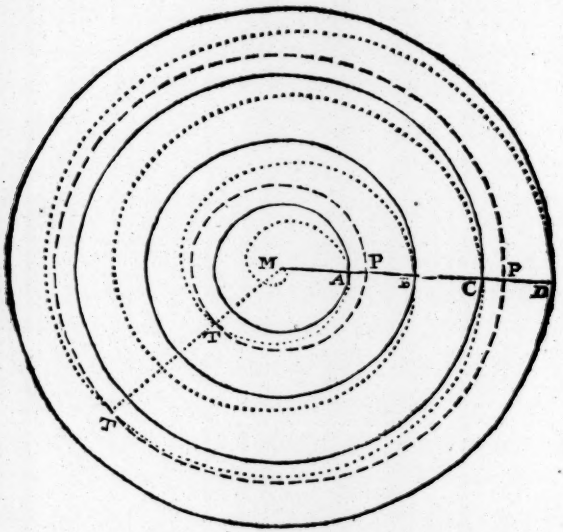


Atq; hoc quidem convenit cum iis quæ habet Torricellius Exempl. 8. eorum quæ ipſius tractatui de ſolido Hyperbolico præmiſit; utut a principiis plane diverſis petita.

PROP. XVII. *Corollarium.*

INſuper, Segmenta ſpiralis, quæ fiunt circulationibus prima, ſecunda, tertia, quarta, & ſic deinceps; ſunt

inter ſe ut 1, 3, 5, 7, *& ſic deinceps in progreſſione arithmetica.*

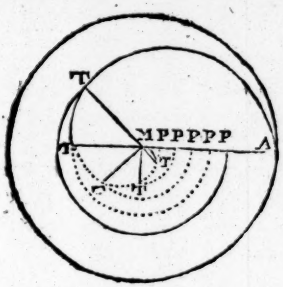


Sunt enim (per 10) ſpirales MA, MAB, MABC, MABCD, &c. ut 1, 4, 9, 16, &c. ergo ſegmenta ſpiralium MA, AB (= MAB − MA,) BC (= MABC − MAB,) CD (= MABCD − MABC,) &c. ut 1, (4 − 1 =) 3, (9 − 4 =) 5, (16 − 9 =) 7. &c.

PROP. XVIII. *Coroll.*

ET univerſaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuo PMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus, erunt ſpiralis ſegmenta continuè intercepta,* (MT, TT, &c.) *ut* 1, 3, 5, 7, *&c.*

Cum enim (propter æquales angulos) ipſæ rectæ MT, MT,



MT, &c. ſint ut 1, 2, 3, 4, &c. (per conſtructionem ſpiralis:) & propterea curvæ MT, MT, &c. (iſtis rectis conterminæ) ſint in rectarum ratione duplicata (per prop. 11.) nempe ut 1, 4, 9, 16, &c. erunt ipſa ſegmenta continua, MT, TT, &c. ut 1, 4 − 1, 9 − 4, 16 − 9. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Tota hæc de longitudine lineæ ſpiralis doctrina, continuis quatuordecim propoſitionibus jam tradita, eſt apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus penitus omiſſa: Neſcio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.

PROP. XIX. *Lemma.*

SI proponatur ſeries Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 4, 9, 16, &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) eritq; $\frac{0+1}{1+1=2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$; $\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$. $\frac{0+1+4+9+16=20}{16+16+16+16+16=80} = \frac{3}{8} = \frac{2}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$. $\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$.

0+

$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$. Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubiq; major quam ſubtripla, ſeu $\frac{1}{3}$. Exceſſus autem perpetuò decreſcit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$ &c', aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis numero ſenario, (ut patet,) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubtriplum, ea quam habet unitas ad ſextuplum numeri terminorum poſt 0, adeoq; ----

PROP. XX. *Theorema.*

SI proponatur ſeries quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum) continue creſcentium, a puncto vel 0 inchoatarum; ratio quam habet illa ad ſeriem totidem maxime æqualium, ſubtriplam ſuperabit; eritq; exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad ſextuplum numeri terminorum poſt 0; ſive, quam habet radix quadratica termini primi poſt 0, ad ſextuplum radicis quadraticæ termini maximi.

Puta (ſi terminus poſt 0 primus ponatur 1, & ultimi latus *l*) $\frac{1+1}{3}l^2+\frac{1+1}{6l}l^2$. Vel (poſito numero terminorum a, & ultimi latere *l*,) $\frac{a}{3}l^2+\frac{a}{6a-6}l$.

Patet ex Prop. præced.

Cùm autem creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationē ſubtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) ſi in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Acoq; ---

PROP.

PROP. XXI. *Theorema.*

SI pro ponatur ſeries infinita Quantitatum in duplicata ratione arithmetice-proportionaliũ, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continue creſcentium, a puncto ſeu 0 inchoatarum 5 erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 3.

Patet ex præced.

PROP. XXII. *Corollarium.*

IDeoq; *Conus vel Pyramis ad Cylindrum vel Priſma (ſuper eadem vel æquali baſe æquè altum) eſt ut* 1 *ad* 3.

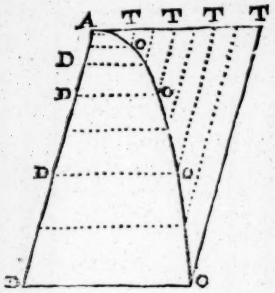
Conſtare enim ſupponimus tam Conum quam Pyramidem ex infinitis planis ſimilibus & parallelis, in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium conſtitutis, quorum minimum ſupponitur Punctum, maximum verò baſis; (per ea quæ diximus ad Prop 6. Con. Sect.) Cylindrus autem vel Priſma, ex totidem maximo æqualibus (ut patet:) Ratio igitur eſt ut 1 ad 3. per præced.

PROP. XXIII. *Coroll:*

ITem *Complementum Semi-parabolæ, (intelligę figuram AOT quæ cum ipſa ſemi-parabola complet Parallelogrammum,) eſt ad Parallelogrammum TD (ſuper eadem vel æquali baſe æquè altum) ut* 1 *ad* 3. *(Et conſequenter, ipſa ſemi-parabola eſt ad idem Parallelogrammum, ut* 2 *ad* 3.)

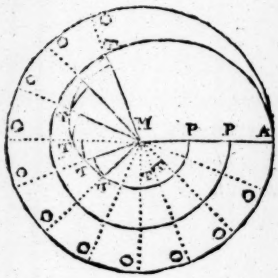
Eſto enim Figuræ AOT vertex A, diameter AT, baſis TO, eiq; parallelæ quotlibet (Baſem inter & verticem) TO, TO, &c. Quoniam ſunt (per prop. 21 Con Sect.) rectæ DO, LO, &c. in ſubduplicata ratione rectarum AD, AD, &c. Erunt

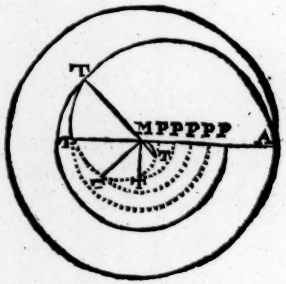
è contra ipſæ AD, AD, &c. hoc eſt TO, TO, &c. in ratione duplicata ipſarum DO, DO, &c. hoc eſt AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (conſtans ex Infinitis rectis TO, TO, &c. in duplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmeticè proportionalium) erit ad Parallelogrammum æquè altum TD (conſtans ex totidem rectis ipſi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 3. per prop. 21. (Quod erat oſtendendum.) Et conſequenter, ſemiparabola AOD (parallelogrammi reſiduum) ad idem Parallelogrammum ut 2 ad 3.



PROP. XXIV. *Corollarium.*

ITem, *Figura* MTM, *quæ ſpirali* MT (*a principio ſpiralis* M *exorſa*) *&* *recta* MT *contermina continetur*; *eſt ad Sectorem correſpondentem* PMT; *ut* 1 *ad* 3.





Nam (ut diximus ad Prop. 5.) conſtare ſupponimus Figuram

ram illam MTM ex infinitis Sectoribus ſimilibus, quorum radii ſunt Arithmeticè-proportionales, adeoq; Sectores ipſi in duplicata ratione Arithmeticè-proportionalium (quippe ſuorum laterum;) Sectorem autem PMT ex totidem Sectoribus maximo æqualibus: Eritq; propterea Figura illa ad hanc, ut 1 ad 3. per prop. 21.

Sectoris autem nomine hic appello etiam Sectorum quotlibet aggregatum, licet ſemi-circulum (aut quidem circulum integrum) æquet vel etiam ſuperet; (ſicut & de Anguli appellatione ſupra monuimus, ad Prop. 5.)

PROP. XXV. *Corollarium.*

ET propterea, *Figura MTA quæ ſpiralis circulatione prima deſcribitur, æquatur trienti circuli primi, AA.*

Nam correſpondens Sector conterminus eſt ipſe circulus integer AA, circuli primi radio MA eodem tempore deſcriptus.

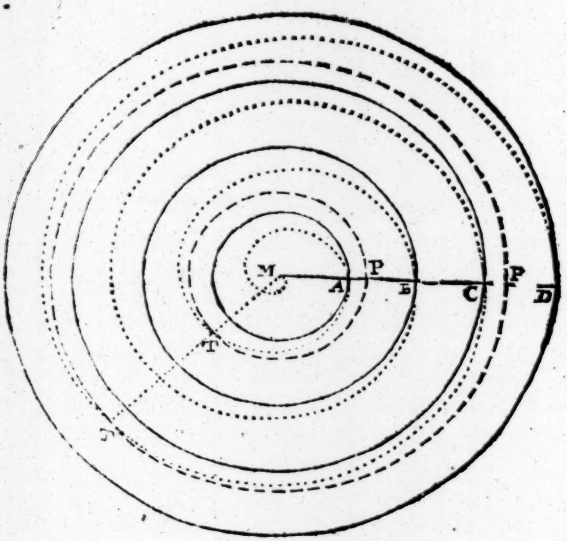
PROP. XXVI. *Corollarium.*

QUæ vero *figura deſcribitur integris circulationibus prima & ſecunda; prima, ſecunda & tertia, prima, ſecunda, tertia, & quarta; & ſic deinceps: (quâlibet parte toties repetita, quoties circulando deſcribitur:) æquatur trienti circuli ſecundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c: (juxta numerum circulationum) ſumpti.*

Nam dum deſcribitur ſpiralis MAB (duabus circulationibus facta) a puncto mobili ab M ad B (in recta circumducta MB) pro moto; & ſimul figura plana a recta (ſic continuè crescente) circumducta: Eodem tempore deſcribitur (a rectâ totâ MB circumducta) circulus ſecundus bis. Adeoq; quot partibus continuè crescentibus (in ratione duplicata Arithmeticè proportionalium) conſtat figura illa Spirali terminata, totidem maximæ æqualibus conſtabit circulus ille bis deſcriptus. Quare figura ſic deſcripta ſpirali adjacens, erit ad circulum

conterminum BB bis ſumptum ut 1 ad 3. per prop. 24.

Et pariter figura ſpiralis, quæ circulationibus primâ, ſecunda & tertia deſcribitur, erit ad circulum tertium ter ſumptum, ut 1 ad 3. Et quæ deſcribitur circulationibus primâ, ſecunda, tertia & quarta, ad circulum quartum quater ſumptum, item ut 1 ad 3. Et ſic deinceps.



Notandum hic, quod tota figura ſpiralis, primâ circulatione deſcripta, in ſecunda circulatione repetitur; & quæ deſcribitur ſecundâ, repetitur in tertia; & ſic deinceps. Adeoq; v. g. in quatuor circulationibus, figura prima (quæ intra ſpiralem primam, primâ circulatione deſcriptam, continetur) quater, ſecunda (quæ inter ſpiralem primam & ſecundam jacet) ter, tertia (quæ inter ſpiralem ſecundam & tertiam jacet) bis, quarta ſemel deſcribitur: ideóq; figura prima quater, ſecunda ter, tertia bis, & quarta ſemel ſumpta, ſimul æquantur trienti circuli quarti quater ſumpti, nempe juxta numerum circulationum

tionum. Et pariter de quotvis circulationibus judicandum eſt, habita ſemper numeri circulationum conſideratione.

PROP. XXVII. *Corollarium.*

SI autem *Spiralis ultra circulationem primam ſed non duabus integris continuetur, figura ſpiralis ſic deſcripta (bis ſumpto quod bis deſcribitur) æquabitur trienti tam integri circuli contermini, quam ejuſdem continuationis ſupra circulum integrum.*

Nam interea dum deſcribitur figura ſpiralis MATM, deſcribitur etiam figura circularis aucta PPTM; nempe circulus integer PP, cum adjuncto etiam ſectore PMT.

PROP. XXVIII. *Corollarium.*

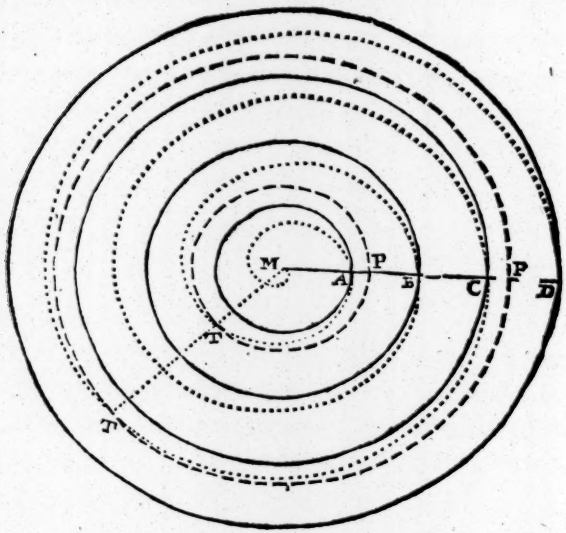
ET pariter, *ſi Spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; figura ſpiralis ſic deſcripta (repetitâ toties qualibet parte quoties deſcribitur,) æquabitur trienti tam integri circuli contermini bis, ter, quater, aut ſæpius ſumpti (pro numero nempe integrarum circulationum,) quàm etiam additamenti ſive ſectoris adjuncti.*

Quia nempe dum figura illa ſpiralis (a circumducta recta creſcente) deſcribitur, toties deſcribitur, (a recta circumducta æquabili) circulus conterminus, atq; inſuper additamentum.

PROP. XXIX. *Coroll.*

ATq; inſuper, *Figuræ ſpirales quæ prima, quæ prima & ſecunda, quæ prima, ſecunda & tertia, quæ prima, ſecunda, tertia & quarta, (& ſic deinceps) circulationibus deſcribuntur, (puta MAM, MABM, MAICM, MAICDM, &c.) ſe habent ad invicem ut numerorum Arithmeticè proportionalium cubi, 1,*

8, 27, 64, &c: *sive in triplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.*



Sunt enim rectæ MA, MB, MC, MD, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. (ut sæpius dictum est,) ideoq; circuli primus, secundus, tertius, quartus, &c. (his radiis descripti) ut 1, 4, 9, 16, &c. (nempe in duplicata ratione radiorum; adeóq; si ponatur circulus primus A = 1 c, erit secundus B = 4 c, tertius C = 9 c, quartus D = 16 c, &c; & propterea si sumatur primus semel, secundus bis, tertius ter, quartus quater, &c. erunt 1 A = 1 c, 2 B = 2 * 4 c = 8 c, 3 C = 3 * 9 c = 27 c, 4 D = 4 * 16 c = 64 c, &c. adeoq; ad invicem ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c. quapropter & horum trientes $\frac{1}{3}$ c, $\frac{8}{3}$ c, $\frac{27}{3}$ c, $\frac{64}{3}$ c, &c. hoc est, (per prop. 25, 26.) figuræ spiriales MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c. sunt etiam inter se ut numeri cubici 1, 8, 24, 64, &c.

PROP.

PROP. XXX. *Corollarium.*

ET Universaliter, *Figuræ ſpirales (a ſpiralis principio exorſæ, & eâdem vel ſimili lineâ ſpirali terminatæ) ſunt ad invicem in triplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per conſtructionem lineæ ſpiralis) eadem ſit ratio rectarum MT, MT, quæ eſt angulorum PMT, PMT, (ſumpta *Anguli* voce, eo ſenſu quo ſupra prop. 5. ut & *ſectoris* voce, eo ſenſu quo ſupra prop. 24.) ſectorum PMT, PMT, ad invicem ratio (quæ componitur ex ratione angulorum & duplicata ratione radiorum,) eſt rectarum MT, MT, ad invicem, ratio triplicata: Et propterea eadem erit etiam ad invicem ratio figurarum ſpiralium MTM, MTM, quæ illorum Sectorum ſunt trientes. per pr 24. *In Figuræ Prop. 29.*

Sic v.g. ſi recta MA (unius circulationis) dicatur 1 r, & circulus eo radio deſcriptus dicatur 1 c; figura ſpiralis eodem tempore deſcripta erit $\frac{1}{3}$ c Igitur in una circulatione cum ſemiſſe fiet recta conterminа $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$; circulus conterminus $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{9}{4}c$, qui ductus in $\frac{1}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{27}{8}c$, ejuſq; triens $\frac{9}{8}c$, eſt figura ſpiralis quæ & circulatione integra & inſuper ſemiſſe deſcribitur. Et ſimiliter in quantacunq; circulatione.

PROP. XXXI. *Corollarium.*

SI vero ejuſmodi figuræ ſpirales, lineis ſpiralibus diſſimilibus, & rectis æqualibus terminentur: (Puta ſi MB in una ſpirali, tanta ſit, quanta MC in alia:) erunt figuræ illæ ſpirales homologis ſuis rectis (puta MA in unâ, & MA in altera) reciproce-proportionales.

Nam in prima erit figura MAEM (duabus circulationibus deſcripta) æqualis trienti circuli ſui B bis ſumpti: Et in ſecunda, figura MABCM (tribus circulationibus deſcripta) æqualis

qualis trienti circuli ſui C ter ſumpti. (per prop. 29, 30.) cumq; ſupponantur æquales circuli B in primâ & C in ſecunda (propter æquales radios,) erunt figuræ ſpirales MABM prima, & MABCM ſecunda, ad invicem, ut 2 ad 3, nempe ut circulus bis ſumptus ad eundem vel æqualem ter ſumptum;) hoc eſt, in reciproca ratione rectarum homologarum MA, MA. Nam MA in prima eſt $\frac{1}{2}$ rectæ MB. & MA in ſecunda $\frac{1}{3}$ (æqualis rectæ) MC; ſunt igitur MA in ſecunda, ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel $\frac{2}{6}$ ad $\frac{1}{6}$, vel 2 ad 3 Ideoq; Figura MABM in ſpirali primâ, ad figuram MABCM in ſpirali ſecunda, ut recta MA in ſecunda ad rectam MA in primâ.

Atq; idem ſimiliter oſtendetur, quæcunq; ſit ratio homologarum rectarum in diſſimilibus ſpiralibus.

PROP. XXXII. *Corollarium.*

SI autem ejuſmodi figuræ ſpirales, lineis ſpiralibus diſſimilibus, & rectis item inæqualibus terminentur; erunt illæ ad invicem in ratione quæ componitur ex triplicata ratione rectarum terminantium, & reciproca ratione rectarum homologarum.

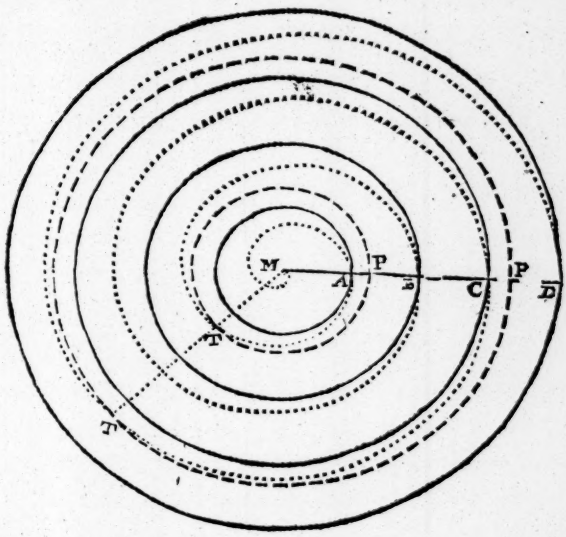
Sequitur ex Prop. 30, 31.

PROP. XXXIII. *Corollarium.*

PORRO, *Figuræ ſpirales, quæ circulationibus prima, ſecunda, tertia, quarta, &c. deſcribuntur, ſunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, *&c. nempe ut differentiæ numerorum cubicorum, quorum latera ſunt Arithmeticè-proportionalia.*

Nam (per pr. 29.) quæ prima, quæ prima & ſecunda, quæ prima ſecunda & tertia, quæ prima ſecunda tertia & quarta, &c, deſcribuntur ſunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. ergo, quæ prima, quæ ſecunda, quæ tertia, quæ quarta, &c. deſcribuntur ſunt ut 1, 8 — 1, 27 — 8, 64 — 27, 125 — 64 &c. hoc eſt,

est, ut 1, 7, 19, 37, 61, &c, nempe ut differentiæ numero-



rum cubicorum continue proximorum; Quarum quidem differentiarum excessus, sive differentiarum differentiæ, sunt Arithmetice proportionales: Nam $1+6=7$. $7+12=19$. $19+18=37$. $37+24=61$. &c.

PROP. XXXIV. *Coroll.*

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos PMT, TMT, &c, æquales invicem facientibus; figuræ spirales continuæ, his rectis interpositæ sunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61. *&c.*

Nam (per prop. 30.) Figuræ spirales a principio ad has lineas continuatæ sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c; Ergo Figuræ invicem continuè sequentes his rectis terminatæ sunt ut 1, 8 —

$1 = 7$, $27 - 8 = 19$, $64 - 27 = 37$, $125 - 64 = 61$. &c. Vel ut $\frac{1}{3}c, \frac{7}{3}c, \frac{19}{3}c, \frac{37}{3}c, \frac{61}{3}c$. &c.

PROP. XXXV. *Coroll.*

DEniq; *Figuræ ſpiralis portiones, quæ in ſingulis circulationibus de novo deſcribuntur, (præter illud quod in præcedenti circulatione deſcriptum fuerat,) nempe quod intra ſpiralem primam continetur, quod inter primam & ſecundam, quod inter ſecundam & tertiam, quod inter tertiam & quartam, &c. ſunt ad invicem ut* 1, 6, 12, 18, 24, *&c. (addendo ſemper, poſt locum ſecundum, numerum ſenarium;) Nempe ut differentiæ differentiarum numerorum cubicorum.*

Sequitur ex 33. Quia $1, 7 - 1$, $19 - 7$, $37 - 19$, $61 - 37$, &c. ſunt ut 1, 6, 12, 18, 24. &c.

SCHOLIUM.

Hæc autem de areâ figuræ ſpiralis doctrina, continuis duodecim propoſitionibus jam tradita, conſona eſt illis quæ tradit Archimedes circa finem libri de *Lineis Spiralibus*. Libet autem id ipſum paulo ulterius proſequi.

PROP. XXXVI. *Coroll.*

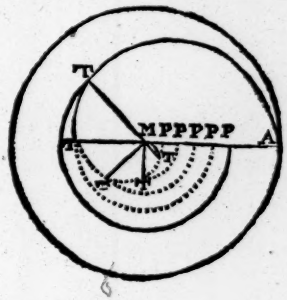
Complementum figuræ ſpiralis (quod nempe cum ipſa ſectorem conterminum complet) eſt ad ſectorem conterminum, ut 2 *ad* 3.

Sequitur hoc quidem ex prop. 24. Sed id ipſum aliter oſtendemus hoc modo.

Conſtare ſupponamus figuram PMTT (complementum figuræ ſpiralis MTTM) ex infinitis arcubus PT, PT, &c. quiquidem ſunt in duplicata ratione rectarum MP, MP, Arithmeticè proportionalium, (ut oſtendimus ad prop. 11.) ſector autem conterminus MPT, ex totidem conſtabit arcubus, ipſis MP,

MP, MP, proportionalibus, adeoq; Arithmetice proportionalibus, (ut patet:)

Eſt autem ſeries ejuſmodi, (in duplicata ratione Arithmetice proportionalium) $\frac{1}{3}$ ſeriei æqualium, (per prop. 21,) & ſeries Arithmetice proportionalium $\frac{1}{2}$ ejuſdem ſeriei æqualium (per prop. 2.) Ergo illa ad hanc (hoc eſt, complementum figuræ Spiralis ad Sectorem) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ (hoc eſt) ut 2 ad 3.



PROP. XXXVII. *Corollarium.*

ET ſpeciatim; *Complementum figuræ ſpiralis unâ circulatione deſcriptæ, eſt ad circulum primum (ipſi conterminum) ut 2 ad 3.*

Nam conſtabit complementum illud ex infinitis arcubus PT, in ratione duplicata rectarum M P arithmetice-proportionalium (ſive ut 0, 1, 4, 9, &c.) quorum maximus eſt integra peripheria A; conſtat autem circulus ille integer ex totidem peripheriis Arithmetice-proportionalibus, ut 0, 1, 2, 3, &c. quarum etiam maxima eſt eadem pæripheria A: Ideoq; Complementum illud, ad hunc circulum, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVIII. *Corollarium.*

SPatia vero *quod figuris ſpiralibus in ſingulis circulationibus deeſt ad complendum ſuum circulum; ſunt ut* 2, 5, 8, 11, 14, *&c. Arithmetice proportionales.*

Cum enim (poſito circulo primo c) erunt (per prop. 29 & 33) figuræ ſpirales circulatione prima deſcripta $\frac{1}{3}$ c, ſecunda $\frac{7}{3}$ c, tertia $\frac{12}{3}$ c, quarta $\frac{19}{3}$ c. &c. circuli autem conterminі

primus 1 c, ſecundus 4 c, tertius 9 c, quartus 16 c, &c. erit exceſſus circulorum, ſupra figuras ſpirales conterminas, primi $\frac{2}{3}$ c, ſecundi $\frac{5}{3}$ c, tertii $\frac{8}{3}$ c, quarti $\frac{11}{3}$ c. &c. Nam $1c - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}c$. $4c - \frac{7}{3}c = \frac{5}{3}c$. $9c - \frac{12}{3}c = \frac{8}{3}c$. $16c - \frac{17}{3}c = 11c$. &c.

SCHOLIUM.

Et quidem facile eſſet complures propoſitiones alias hiſce ſimiles adjungere, tam de ipſis figuris ſpiralibus quam earum complementis; tam quæ circulationibus integris deſcribuntur, quam intermediis. Sed ex dictis facile poterit quilibet eas, ſi opus videbitur, ſupplere. ut non neceſſe ſit diutius hîc morari. Et metuo ne jamjam nimius fuerim. Adjungam tamen unum aut alterum ex dictis Corollarium, (in eorum gratiam qui dubitant, an poſſibile ſit figuram aliquam rectilineam circulo æqualem eſſe:) Nempe ----

PAtet ex dictis; *Circulo cuilibet figuram aliquam rectilineam æqualem eſſe.*

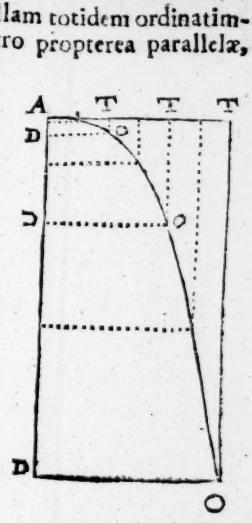
Cum enim patet (ex pr. 25.) circulo cuilibet figuram aliquam ſpiralem æqualem eſſe; & (ex prop. 16.) cuilibet figuræ ſpirali aliquam parabolam; & deniq. (ex pr. 23.) cuilibet Parabolæ aliquam figuram rectilineam, ſequitur & cuilibet circulo figuram aliquam rectilineam æqualem eſſe.

Non ſunt igitur vel rectilineum & circulus, vel linea recta & curva, quantitates adeo inter ſe heterogeneæ, quin & invicem rite comparari, & quidem invicem æquales eſſe poſſint: Quanquam fieri poſſit ut circuli diameter & perimeter eouſq; ſint irrationales, ut nec veris numeris, nec etiam ullo adhuc in uſum recepto notationis modo, earum ad invicem ratio exprimi poſſit.

PORRO: Ex jam traditis innoteſcit etiam methodus *Rectam Parabolicæ (vel etiam Paraboloidicæ) æqualem quam proximè, inveniendi.*

Si enim, quæ ſemiparabolam rectam in vertice contingat recta AT, in quotlibet æquales particulas diviſa; (quarum quælibet dicatur *e*, atq; numerus omnium *n*;) & in ſingularum particularum

particularum terminis ad tangentem illam totidem ordinatim applicentur rectæ, (Parabolæ diametro propterea parallelæ, & facientes ad Tangentem angulos rectos,) TO, TO, &c. quarum minima dicatur 1; erunt illæ ad invicem per prop. 23. ut numeri quadratici 1, 4, 9, 16, &c. & earum differentiæ ut 1, 3, 5, 7, &c. numeri impares deinceps ab unitate; (quarum differentiarum maxima erit $2n-1$.) Rectæ parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica constitutos) connectentes, (quæ erunt propterea ipsi parabolæ deinceps inscriptæ,) erunt ut $\sqrt{:a^2+1} . \sqrt{:a^2+9} . \sqrt{:a^2+25} . \sqrt{:a^2\times 49}$ &c. (quippe quarum quadrata per 47 e 1. æquantur quadratis tam particularum a, quam differentiarum inter proximas quasque parallelas, hoc est, numerorum imparium.) Quæ quidem rectæ (parabolæ inscriptæ) quo plures fuerint, eò propius ad parabolicæ mensuram accedet earum omnium aggregatum; ita tamen ut ex omnibus sic aggregata recta sit ipsâ parabolicâ minor.

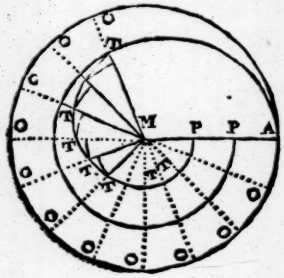


Sin velit aliqui rectam iusta maiorem (ut constet intra quos cancellos determinare possit parabolica longitudinem;) neque difficilis erit hæc investigatio, tangentium ope perficienda.

Si vero curva AOO non supponatur Parabola, sed paraboloides Cubicale, Biquadricale, &c. Idem processus e it, mutatis mutandis, atque in Parabola. Sumendæ enim pro parallelarum differentiis, non 1, 2, 5, 7, &c. differentiæ numerorum Quadraticorum; sed 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum, vel 1, 15, 65, 175, &c. differentiæ numerorum Biquadraticorum; &c. prout Paraboloides cuiusq; natura postulet: adeoq; inscriptæ erunt $\sqrt{:a^2+1}$ $\sqrt{a^2+9}$ &c, vel $\sqrt{:a^2+1} . \sqrt{:a^2+225}$ &c. & sic deinceps. Ut ex inferius tradendis pr. 45. patebit.

EAdem fere methodo, *Invenietur recta Spirali genuinæ quam-proximè æqualis.*

Si enim (per ea quæ dicta sunt prop. 5.) supponatur inscribi figuræ spirali alia ex quotlibet sectoribus similibus conflata: Erunt (propter spiralem) tam sectorum arcus, quam horum sinus sive recti sive versi, ut & radii, arithmetice proportionales. Radiorum autem continuum augmentum dicatur a. Si igitur a sectoris cujusvis arcus initio ad radium per ipsius terminũ ductũ demitti supponatur perpendicularis, erit illa ipsius arcus sinus rectus, cujus quadratum simul cum quadrato sinûs versi communi augmento a aucti, æquabitur quadrato rectæ Spirali inscriptæ: (per 47 e 1.) Sinus autem versûs ille dicatur v, & totius circuli sui diameter d; erit igitur quadratum sinus recti (ex ductu sinûs versi v in diametri residuum $d - v$ factum) $vd - v^2$; & quadratum sinûs versi communi augmento aucti (nempe $v + a$) erit $v^2 + 2va + a^2$; & propterea quadratum inscriptæ (ex his conflatum) $vd + 2va + a^2$. Cum autem (propter æquales similium Sectorum angulos) eadem sit ubiq; sinûs versi ad diametrum ratio, esto ea quam habet 1 ad m (quæ ratio major minorve reputanda erit prout singulorum sectorum anguli majores minoresve fuerint:) Adeoq; cum sit $1.m :: v.d$, erit $d = vm$: & propterea quadratum rectæ spirali inscriptæ $vd + 2va + a^2 = vvm + 2va + a^2$. Deniq;, cum sint similium illorum sectorum deinceps positorum arcus, adeoq; & sinus versi, arithmetice proportionales, (ab o inchoati,) dicantur illi 0, 1, 2, 3. &c. Erunt ergo inscriptæ illæ $\sqrt{:} 0m + 0a + a^2$. $\sqrt{:} 1m + 2a + a^2$ $\sqrt{:} 4m + 4a + a^2$. $\sqrt{:} 9m + 6a + a^2$. $\sqrt{:} 16m + 8a + a^2$. Et sic deinceps Quò autem plures supponantur eidem figuræ spirali sectores inscribi, eò propius ad lineam spiralem accedet rectarum



sic

ſic inſcriptarum aggregatum: quod tamen vera ſpirali perpetuo minus erit.

Si autem harum inſcriptarum prima omittatur, & illius vice poſt ultimam ſubjungatur quæ proximè erat inſecutura, (quod tantundem eſt atq; pro figura ex ſectoribus inſcripta, circumſcriptam ſubſtituere,) atq; tandem addatur a; habebitur ex omnibus aggregata recta quæ vera ſpirali major erit; ſed quæ ad juſtam eo propius accedet quò plures ſupponantur Sectores adſcribi.

Et ſimili forma procedendum erit (mutatis mutandis) in aliis Spiralium generibus in Scholio Prop. 45. memoratis.

PROP. XXXIX. *Lemma.*

SI proponatur ſeries quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum,) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritq; $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. $\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{3}+\frac{1}{8}$. $\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}+\frac{1}{12}$. $\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320} = \frac{5}{16} = \frac{1}{3}+\frac{1}{16}$ $\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750} = \frac{6}{20} = \frac{1}{3}+\frac{1}{20}$. $\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512} = \frac{7}{24} = \frac{1}{3}+\frac{1}{24}$. Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubiq; major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$.

Exceſ-

Exceſſus autem perpetuò decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$. &c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o. Adeoq; ----

PROP. XL. *Theorema.*

SI proponatur ſeries quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio, quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ſubquadruplam ſuperabit; erítq; exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o; ſive, quam habet radix cubica termini primi poſt o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Puta $\frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$ vel $\frac{n}{4} l^3 + \frac{n}{4l} l^3 = \frac{1}{4} n l^3 + \frac{1}{2} n l^2$.

Patet ex præcedente.

Cùm autem, creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam ita continuò minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) Si in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeóq; ----

PROP. XLI. *Theorema.*

SI proponatur ſeries infinita quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue creſcentium, a puncto ſeu o inchoatarum; erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1, ad 4.

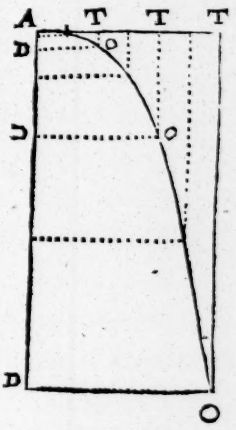
Patet ex præcedente.

PROP.

PROP. XLII. *Corollarium.*

IDeoq; , *Complementum ſemi-paraboloidis cubicalis, AOT, eſt ad Parallelogrammum TD (ſuper eâdem vel æquali baſe æquè altum,) ut 1 ad 4. (Et conſequenter, ipſum ſemiparaboloides ad idem Parallelogrammum, ut 3 ad 4.)*

Eſto enim Semiparaboloidis cubicalis AOD (cujus diameter AD, ordinatim applicatæ DO, DO, &c.) complementum AOT (cujus diameter AT, ordinatim-applicatæ TO, TO, &c.) Quoniam igitur (per pr. 45. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. vel ipſis æquales AT, AT, &c. ſunt in ſubtriplicata ratione rectarum AD, AD, &c. vel ipſis æqualium TO, TO, &c. Erunt e contra ipſæ TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (conſtans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmeticè proportionalium) erit ad Parallelogrammum TD, per præced. (conſtans ex totidem ipſi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 4. (Quod erat oſtendendum.) Et conſequenter, Semiparaboloides AOD (parallelogrammi reliduum) ad idem parallelogrammum ut 3 ad 4.



PROP. XLIII. *Lemma.*

PAri methodo invenitur ratio ſerici infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, ſextuplicata &c. Arithmeticè proportionalium, a puncto ſeu o inchoatarum, ad ſeriem

totidem maximæ æqualium. Nempe in Quadruplicatâ, erit ut 1 ad 5: in Quintuplicata, ut 1 ad 6: in sextuplicata, ut 1 ad 7. Et sic deinceps.

Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continuo propiùs accedere, ita ut differentia tandem evadat quâvis assignabili minor; adeoq; in infinitum continuata evanescet.

Operosas demonstrationes lineares non adjungo; quas tamen, siquis postulet, poterit ille (modo vacet) tales exquirere figurarum inscriptione & circumscriptione, vel etiam aliàs præstandas; (quales habet Archimedes pr. 10, & 11, de lin. spiral.) ostendendo, quòd ratio neq; major neq; minor est quam assignata. At mihi sufficere videntur illæ quas produxi, Cavallerii *Methodum Indivisibilium* (quoniam eam invenio a Geometris jam esse receptam) secutus.

Nota tamen eas quibus usus sum demonstrationibus, potius figuras inscribendas imitari, cum supponant primum terminum 0. Si quis vero figuras circumscribendas imitari mallet, fieri quidem & illud potest, modo primus terminus ponatur 1.

Notandum etiam, rationes inductione quærendas, in seriebus illis quarum processus est in Arithmetice proportionalium ratione quadruplicata (& sequentibus) magis implicatas esse quam præcedentium.

Puta in Biquadratis $\frac{l+1}{5} l^4 + \frac{l+1}{10} 3l^4 + \frac{l+1}{30l^2} l^4 + \frac{-l-1}{30l^3} l^4$. Vel $\frac{n}{5} l^4 + \frac{3n}{10l} l^4 + \frac{n}{30l^2} l^4 - \frac{n}{30l^3} l^4 = \frac{1}{5} nl^4 + \frac{1}{10} nl^3 + \frac{1}{30} nl^2 - \frac{1}{30} nl$. (posito nempe termino primo 1, latere maximo l numero terminorum $n = l + 1$.)

In Surdesolidis autem $\frac{l+1}{6} l^5 + \frac{l+1}{3l} l^5 + \frac{l+1}{12l^2} l^5 + \frac{-l-1}{12l^3} l^5$. Vel $\frac{n}{6} l^5 + \frac{n}{3l} l^5 - \frac{n}{12l^2} l^5 - \frac{n}{12l^3} l^5 = \frac{1}{6} nl^5 + \frac{1}{3} nl^4 + \frac{1}{12} nl^3 - \frac{1}{12} l^2$.

Sed (quod nobis sufficit) ad debitam rationem ita continuè magis

magis accedunt, ut tandem differentia evadat quavis assignabili minor.

SCHOLIUM.

Si quis autem cupiat rationes hujusmodi, utut intricatas, quæ sequentibus seriebus finitis quibuscunq; conveniat, (puta in sextuplicatâ, septuplicatâ, &c. ratione Arithmeticè proportionalium) invenire: quomodo illud fiat deinceps dicetur in Schol. prop. 108.

PROP. XLIV. *Theorema.*

IDeoq; si intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu o inchoatarum, & continuè crescentium pro ratione vel Arithmeticè-proportionalium, (quam seriem Lateralium sive *Primanorum* appello,) vel eorum quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. (quam appello seriem *Secundanorum*, *Tertianorum*, *Quartanorum*, &c.) Erit totius seriei ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ sequitur in hac Tabella. Nempe

Æqualium	$\frac{1}{1}$		1
Primanorum	$\frac{1}{2}$		2
Secundanorum	$\frac{1}{3}$		3
Tertianorum	$\frac{1}{4}$		4
Quartanorum	$\frac{1}{5}$		5
Quintanorum	$\frac{1}{6}$	Vel ut I ad	6
Sextanorum	$\frac{1}{7}$		7
Septimanorum	$\frac{1}{8}$		8
Octavanorum	$\frac{1}{9}$		9
Nonanorum	$\frac{1}{10}$		10
Decimanorum	$\frac{1}{11}$		11

Et sic deinceps. Ita ut fractionum Denominatores, sive Consequentes rationum, sint ab unitate Arithmetice proportionales; communis autem sive Numerator sive Antecedens 1.

PROP. XLV. *Corollarium.*

Hinc diſcimus methodum inveniendi aream complementi Parabolæ, & Paraboloideos Cubicalis, Biquadraticalis, Surdeſolidalis, aut ſuperioris cujuſlibet poteſtatis; & conſequenter, etiam aream Parabolæ, aut Paraboloideos cujuſcunq; poteſtatis. Quod oſtendere pollicitus ſum ad prop. 48. Con. Sect.

Nempe, cùm complementum Parabolæ (vel Semiparabolæ) ſit ſeries ſecundanorum, (ut diximus ad prop. 23;) complementum Paraboloidis cubicalis (vel ſemiparaboloidis,) ſeries Tertianorum, (ut diximus ad prop 42.) atq; (eâdem ratione) complementum Paraboloidis Biquadraticalis, ſeries Quartanorum; complementum Paraboloidis ſurdeſolidalis, ſeries Quintanorum; & ſic deinceps: Erit horum ratio ad Parallelogrammum circumſcriptum, (ſeries nempe totidem maximo æqualium,) ea quæ eſt 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, & ſic deinceps: juxta tabellam propoſitionis præcedentis. Et conſequenter, ipſa Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, Surdeſolidale, &c. (quæ nempe cum ſuis complementis æquantur Parallelogrammis circumſcriptis) ſunt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6. &c.

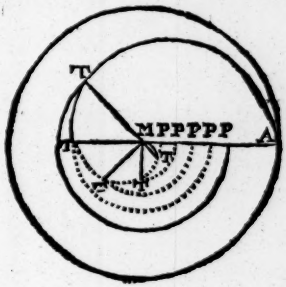
SCHOLIUM.

Et hoc quidem pacto licebit infinitis figuris curvilineis æquales rectilineas conſtituere. Quodq; in ſola Parabola (ſumma cum admiratione) præſtitit Archimedes (& poſt illum alii;) id nos in Paraboloide cujuſcunq; poteſtatis jam præſtitimus.

Quæ autem de Parabolis & Paraboloidibus hucuſq; tradita ſunt, aut etiam adhuc deinceps tradenda, poſſunt etiam Spiralibus facillimo negotio accommodari. Si enim ſupponamus rectam MT continuè augeri, non quidem in eadem ratione cum angulo PMT, (ut in Spirali Archimedea,) ſed in ejuſdem ratione duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. orientur alia atq; alia Spiralium genera: quarum tamen ad peripheriam vel arcum (eo ſenſu quo dictum eſt in Schol. prop. 13. & 15.) ratio

non

non minus innoteſcet (ut & figurarum adjacentium ratio ad circulum vel ſectorem) quam in illa Archimedea. Exſempli gratia. *Si angeatur recta MT in duplicata ratione anguli PMT; erit linea Spiralis (a principio inchoata) MT, ad arcum conterminum PT, ut* 1 *ad* 3; (quippe erit ſpiralis illa, ſeries Secundanorum; arcus autem, ſeries Æqualium:) *Et Figura adjacens erit ad conterminum Sectorem, ut* 1 *ad* 4; (nempe ut ſeries Tertianorum ad ſeriem Æqualium:) *Et ſimiliter, ſi creſcat recta MT in anguli MPT ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Erit Spiralis (ſenſu quo ſupra) ad conterminum Arcum, ut* 1 *ad* 4, 5, *&c; & Figura adjacens ad ſectorem conterminum, ut* 1 *ad* 5, 6 *&c.* Quæ omnia eodem modo (mutatis mutandis) demonſtrabuntur, quo prop. 5, 24, &c. Atq; hinc quidem ſpiralium doctrina in immenſum augeri poſſit. Cum autem id ſuo quilibet Marte per jam dicta ſatis poſſit intelligere, neq; nobis fit animus labore ſupervacaneo hæc ulterius ampliandi: ſufficiat id in tranſitu monuiſſe.



Sed & hinc etiam facilis eſſet tranſitus ad Spirales non tantum in plano, ſed in ſolido deſcriptas, puta in ſuperficiebus Coni & Sphæræ, ſive etiam conoidum & ſphæroidum, rite conſiderandas; &, ad ſpirales aut Circulos in Cylindro comparandas: Figuras item illis adjacentes, ad figuras adjacentes hiſce. Adhibitis tamen iis, quæ de ſeriebus auctis & diminutis deinceps ſecuturæ ſunt, propoſitionibus. Hæc autem omnia, ne nimius ſim, intacta prætereunda judico: Cum ea quilibet, ex iis quæ hic tradita ſunt vel deinceps tradenda, facile poſſit deducere.

PROP. XLVI. *Lemma.*

ITem (*per prop.* 44.) Data ratione quam habet ſeries una, cujuſlibet poteſtatis, (ad ſeriem æqualium;)

reperitur ratio quam habet alia ſeries alterius cujuſvis poteſtatis, (ad ſeriem item æqualium:) inveniendo nempe homologum terminum progreſſionis Arithmeticæ.

Ut, ſi Quadratorum ſive Secundanorum ſeries ſit $\frac{1}{3}$ ſeriei æqualium; erit ſeries Lateralium ſive Primanorum $\frac{1}{2}$ ſeriei æqualium: Quia, ut ſeries Primanorum media eſt inter ſeriem Æqualium & ſeriem Secundanorum, ſic 2 (conſequens rationis quæſitæ Primanorum) eſt media Arithmetica inter 1 & 3 (conſequentes rationum æqualium & ſecundanorum.) Sic cum cuborum ſive Tertianorum ratio ſit $\frac{1}{4}$ ſive 1 ad 4, inter quam ſeriem & ſeriem æqualium, duarum poteſtatum ſeries interjiciuntur; quærendæ ſunt duæ mediæ Arithmeticæ inter 1 & 4, puta 2 & 3, quarum illa Primanis, hæc Secundanis convenit. Et ſic in cæteris.

Et ſimiliter, ſi quærenda ſit ratio ſuperioris poteſtatis ſeriei conveniens; id reperitur progreſſionem continuando ad terminum quæſitum uſq; : Ut, ſi ſeries Quartanorum rationem habent, ad ſeriem æqualium, eam quæ eſt 1 ad 5 ſive $\frac{1}{5}$; ſeries ſextanorum habebit rationem 1 ad 7: quia in progreſſione Arithmetica ubi terminus (poſt unitatem) quartus eſt 5, terminus ſextus erit 7. & pariter in reliquis.

PROP. XLVII. *Lemma.*

Atq; hæc regula non minus valebit ſi exponatur ſeries quantitatum quarumlibet (non quidem juxta ſeriem Primanorum, ſed) juxta quamvis aliam Tabellæ ſeriem, & de illarum Quadratis, Cubis, &c. inquiratur.

Verbi gratia. Si intelligatur ejuſmodi ſeries quantitatum quarumlibet ſecundum ſeriem Secundanorum (quibus aſſignatur in Tabella ratio 1 ad 3) diſpoſitarum: harum Quadratis conveniet ratio 1 ad 5; (quia 1, 3, 5, ſunt arithmetice proportionales;) & cubis conveniet ratio 1 ad 7; & ſic deinceps

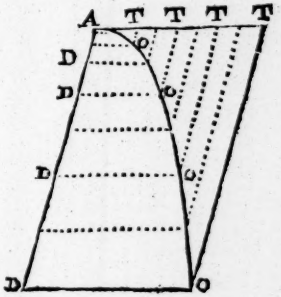
ceps; quia 1,3,5,7,&c. sunt Arithmetice proportionales, prout Unitas, Radix, Quadratum, Cubus,&c. sunt potestates proximè sequentes & Geometricè proportionales.

Nec hoc aliud est, quam quod habetur in Tabella; nam si quantitates assumptæ sint series Secundanorum, cujus ratio est $\frac{1}{2}$; earum quadrata erunt series Quartanorum, cujus ratio $\frac{1}{3}$; & earundem cubi erunt series Sextanorum, cujus ratio $\frac{1}{2}$; &c. ut dictum est.

PROP. XLVIII. *Corollarium.*

ET consequenter, *Conoides vel Pyramidoides complemento Semi-parabolæ (circa ipsius diametrum) aptandum, est ad Cylindrum vel Prisma super æquali basi æquè altum, ut* 1 *ad* 5.

Nempe si complementum semi-parabolæ rectæ, AOT, manente recta AT, circumvolvatur, ut describatur Conoides rectum: vel, universaliter, si (juxta methodum a nobis indicatam prop. 5, 6, 9. Con. Sect.) diametro vel axi AT, ordinatim applicentur circuli, vel similia quævis plana, quorum vel radii vel rectæ similiter positæ rationem eandem habeant inter se quã rectæ TO, TO, &c. ut compleatur Conoides vel Pyramidoides sive rectum sive inclinatum: dico illud Conoides vel Pyramidoides esse ad Cylindrum vel Prisma super eadem basi æquè altum ut 1 ad 5. Nam, cùm rectæ omnes TO, TO, &c. sunt series Secundanorum, (quibus convenit ratio 1 ad 3.) similia quælibet plana super has rectas similiter constituta, erunt inter se ut harum rectarum quadrata: sive in duplicata ratione rectarum TO, TO. At ratio serici rectarum illarum convenientis (serici quippe se-



cundanorum

cundanorum) est 1 ad 3; ergo seriei planorum conveniet ratio 1 ad 5: quia nempe 1, 3, 5, sunt Arithmetice-proportionales: (prout Unitas, Radix, & quadratum sunt Geometricè-proportionales.) Et quidem, si rectæ TO, TO, &c. sint series Secundanorum; earum quadrata (vel plana quadratis proportionalia) erunt series quartanorum; cui in Tabella convenit ratio 1 ad 5.

PROP. XLIX. *Corollarium.*

ET similiter; *Si complemento semiparaboloidis cubicalis aptetur (circa ipsius Diametrum) Conoides vel Pyramidoides; erit hoc ad Cylindrum vel Prisma (super eadem vel æquali basi æquè altum,) ut 1 ad 7.*

Nam, cum rectæ TO, TO, &c. (in complemento Semiparaboloidis Cubicalis,) sint series Tertianorum, quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4; horum quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) seriei conveniet ratio 1 ad 7; quia 1, 4, 7, sunt Arithmetice proportionales. Vel etiam, quia plana sunt series Sextanorum, quibus in Tabella assignatur ratio 1 ad 7.

PROP. L. *Corollarium.*

ET pariter; *si semiparaboloidum aliorum (puta Biquadraticalium, Surdesolidalium, &c.) complementis aptetur (circa eorum diametros) Conoides vel Pyramidoides aliquod; habebit illud ad Cylindrum vel Prisma (super æquali basi æquèaltum) rationem notam (puta 1 ad 9, 1 ad 11, &c.)*

Cum enim complementorum illorum rectæ sint series quartanorum, quintanorum, &c. adeoque rationes in Tabellâ assignatas habeant 1 ad 5, 1 ad 6, &c. series quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) rationem habebunt 1 ad 9, 1 ad 11, &c. quia 1, 5, 9, vel 1, 6, 11, &c. sunt arithmetice

metice proportionales. Vel etiam, quia si rectæ sint series Quartanorum, Quintanorum, &c. plana similia ad has rectas similiter posita, erunt series Octavanorum, Decimanorum, &c. quibus convenit ratio 1 ad 9, 1 ad 11, &c.

SCHOLIUM.

Atq; hoc pacto figurarum solidarum superficiebus curvis comprehensarum ingens multitudo reduci possunt ad alias si superficiebus planis comprehensas; & corpora non modo conica (quod docuerunt veteres) sed & alia quamplurima conoidica, ad cylindrum reduci. Quod nescio an quispiam alius antehac ostenderit.

PROP. LI. *Lemma.*

Juxta eandem regulam (prop. 46, 47.) Si exponatur series quantitatum quarumlibet, juxta quamlibet Tabellæ seriem; de illarum radicibus quadraticis, cubicis, &c. aut quibusvis intermediis potestatibus, pariter inquirendum erit.

Exempli gratia; si exponantur infinita Quadrata (vel quælibet plana similia) juxta seriem Quartanorum; (cui assignatur, in Tabella, ratio 1 ad 5:) series laterum (vel rectarum in illis similiter positarum) rationem habebit (ad seriem æqualium) 1 ad 3: quia 1, 3, 5, sunt arithmetice proportionalia: vel etiam, quia ubi plana sunt series Quartanorum, eorum latera erunt series secundanorum, quibus assignatur in Tabellâ ratio 1 ad 3.

Sic, si exponantur cubi infiniti (vel quælibet similia solida) juxta seriem sextanorum, quibus in Tabella congruit ratio 1 ad 7; eorum lateribus cubicis (vel rectis in his similiter positis) conveniet ratio 1 ad 3; & horum laterum quadratis (vel planis in cubis illis similiter positis) ratio 1 ad 5; quia duarum mediarum arithmeticarum inter 1 & 7, minor est 3, major 5, (sunt enim 1, 3, 5, 7, arithmetice proportionalia: duas autem medias Arithmeticas interpono inter 1 & 7; quia totidem supponimus medias Geometricas inter unitatem & cubum, nempe Latus

& quadratum; ſunt enim Unitas, Latus, Quadratum, Cubus, Geometrice proportionalia. Et quidem ſi Cubi ſint ſeries ſextanorum, Latera erunt ſeries ſecundanorum; & laterum quadrata, ſeries quartanorum; quibus in Tabella conveniunt rationes 1 ad 3, 1 ad 5.

Si vero quantitates expoſitæ in eadem ſerie ſextanorum, eſſent quadrata (vel plana quælibet ſimilia) eorum lateribus conveniret ratio 1 ad 4. Quia inter 1 & 7 media Arithmetica eſt 4; ſicut inter unitatem & quadratum media Geometrica eſt Radix vel Latus. Et quidem ſi quadrata ſint ſeries ſextanorum, eorum Latera erunt ſeries tertianorum; quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4.

PROP. LII. *Corollarium.*

ET propterea; *Ex cognitis rationibus quas habent Conoidea & Pyramidoidea, prop.* 48, 49, 50, *memorata,* (*ad Cylindrum vel Priſma, ſuper æquali baſe æqualtum*;) *cognoſcentur rationes quas habent plana illa unde conſtruuntur, ad Parallelogrammum circumſcriptum. Nempe complementum Semiparabolæ ut* 1 *ad* 3: *complementa Semiparaboloidis Cubicalis, Biquadraticalis, Surdeſolidalis &c. ut* 1 *ad* 4, 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*

Si enim Conoidea ad Pyramidoidea illa cognoſcantur eſſe ſeries quartanorum, Sextanorum, Octavanorum, Decimanorum; &c. Eiſq; convenire rationes 1 ad 5, 1 ad 7, 1 ad 9, 1 ad 11, &c, Eorum lateribus (quæ propterea ſunt ſeries Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c.) convenient rationes 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, &c. Quia 1, 3, 5, item 1, 4, 7, item 1, 5, 9, item 1, 6, 11, &c. ſunt Arithmeticè-proportionales.

PROP. LIII. *Lemma.*

HIs intellectis; patet aditus ad inveſtigationem rationum quas (ad ſeriem maximæ æqualiū) habere dicantur ejuſmodi ſeries Radicum Quadraticarum, Cubicarum, Biquadraticarum, &c. nume-

numerorum ſive quantitatum arithmetice-proportionalium, a puncto vel 0 inchoatarum; (puta $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. $\sqrt{c0}$, $\sqrt{c1}$, $\sqrt{c2}$, $\sqrt{c3}$, &c. $\sqrt{qq0}$, $\sqrt{qq1}$, $\sqrt{qq2}$, $\sqrt{qq3}$, &c.) Quas appello ſeries Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum; &c.

Exſempli gratia. Si exponantur ejuſmodi infinita Quadrata Arithmeticè-proportionalia, ſive juxta ſeriem Primanorum; quibus in Tabellâ aſſignatur ratio 1 ad 2: Eorum Lateribus, (hoc eſt, ſeriei ſubſecundanorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{2}$ (ſive 2 ad 3;) quia 1, $1\frac{1}{2}$, 2, ſunt Arithmetice proportionalia.

Item, ſi ſupponantur ejuſmodi infiniti Cubi Arithmeticè-proportionales, ſive juxta ſeriem Primanorum; quibus convenit in Tabella, ratio 1 ad 2. Illorum radicibus cubicis, (hoc eſt ſeriei ſubtertianorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{3}$ (vel 3 ad 4:) & harum radicum quadratis, ratio 1 ad $1\frac{2}{3}$ (vel 3 ad 5:) Quia ſcilicet 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2. ſunt Arithmeticè-proportionalia; ſicut Unitas, radix, quadratum, & Cubus, ſunt Geometricè-proportionalia.

Et pari modo, ſi infinita Biquadrata, Surdeſolida, &c. conſtituta intelligantur juxta ſeriem Primanorum, quibus convenit ratio 1 ad 2; eorum radicibus Biquadraticis, Surdeſolidalibus, &c. convenient rationes 4 ad 5, 5 ad 6, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{4}$, 1 ad $1\frac{1}{5}$ &c. quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$. 2; item 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{5}$, 2; &c. ſunt Arithmetice-proportionalia. Adeoq; ---

PROP. LIV. *Theorema.*

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu 0 inchoatarum, & continue creſcentium pro ratione Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c, numerorum Arithmeticè proportionalium; (quam appello ſeriem *Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c.*) Erit totius ratio ad ſeriem totidem maximè æqualium, ea

quæ ſequitur in hac Tabella: Nempe

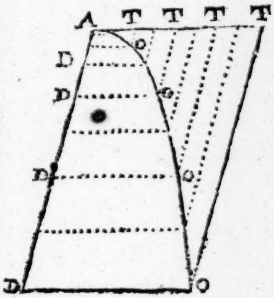
Subſecundanorum	$\frac{2}{3}$	Vel ut 1 ad	$1\frac{1}{2}$.
Subtertianorum	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$.
Subquartanorum	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$.
Subquintanorum	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$.
Subſextanorum	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$.
Subſeptimanorum	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$.
Suboctavanorum	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$.
Subnonanorum	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$.
Subdecimanorum	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$.

Et ſic deinceps.

Patet ex præcedente.

PROP. LV. *Coroll.*

ERgo, *Planum ſemi-parabolæ (vel etiam Parabolæ) eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut* 2 *ad* 3. (*Et conſequenter ipſius complementum eſt ad idem Parallelogrammum ut* 1 *ad* 3.)



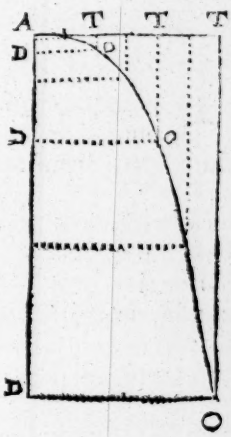
Eſt enim Planum Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) ſeries infinita ſubſecundanorum (per 8 prop Con. Sect.) Parallelogrammum autem ſeries totidem maximæ æqualium: Ergo illud ad hoc ut 1 ad $1\frac{1}{2}$ vel ut 2 ad 3. (et, conſequenter, ipſius complementum, nempe Parallelogrammi reſiduum, ut 1 ad 3.)

PROP.

PROP. LVI. *Coroll.*

ITem, *Planum Semi-paraboloidis (vel etiam Paraboloidis) cubicalis, est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut* 3 *ad* 4. (*& consequenter, ipsius Complementum, est ad idem Parallelogrammum, ut* 1 *ad* 4.)

Cum enim (per 45. Prop. Con. Sect.) ordinatim-applicatę in Paraboloide cubicali sint in subtriplicata ratione diametrorum (sive distantiarum a vertice) erit planum ex illis omnibus conflatum series subtertianorum; quæ se habet ad seriem eorundem maximo æqualium (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum,) ut 1 ad 1 $\frac{1}{3}$, sive ut 3 ad 4. (Et consequenter, ipsius complementum, nempe parallelogrammi residuum, est ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)



PROP. LVII. *Corollarium.*

EOdem modo, *Planum Semi-paraboloidis (vel Paraboloidis) Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujusvis potestatis, ratio ad Parallelogrammum circumscriptum nota erit; puta ut* 4 *ad* 5, 5 *ad* 6, *&c. (Et consequenter, ipsorum etiam complementa ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut* 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*)

Sunt enim illa plana series subquartanorum, subquintanorum, &c. ideoque, ad series Æqualium, ut 4 ad 5, 5 ad 6: &c. &, consequenter, eorum complementa (quæ quidem sunt series Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

quæ ſequitur in hac Tabella: Nempe

Subſecundanorum	2/3	ut 1 ad	1 1/2.
Subtertianorum	3/4		1 1/3.
Subquartanorum	4/5		1 1/4.
Subquintanorum	5/6		1 1/5.
Subſextanorum	6/7		1 1/6.

Subſeptim
Suboctava
Subnonan
Subdecima

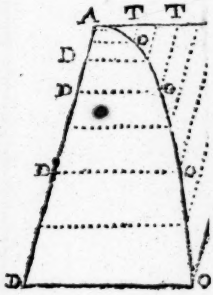
Et

Patet ex præced

PR

ERgo, *Planum ſem*
ad Parallelogram
conſequenter ipſius co
grammum ut 1 *ad* 3.

IRREGULAR

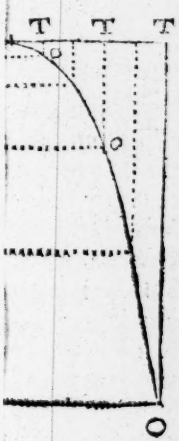


mentum, nempe Paralle-
logrammi reſiduum, ut 1
ad 3.)

PR OP.

PROP. LVI. *Coroll.*

ITem, *Planum Semi-paraboloidis (vel etiam Paraboloidis) cubicalis, est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 3 ad 4. (& consequenter, ipsius Complementum, est ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)*



ULAR PAGINATION

...m.

...bidis (vel Para-
...dalis, aut superi-
...logrammum cir-
...5 ad 6, &c. (Et
...a ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut 1 ad 5, 1 ad 6. &c.)

Sunt enim illa plana series subquartanorum, subquintanorum, &c. ideoque, ad series Æqualium, ut 4 ad 5, 5 ad 6; &c. &. consequenter, eorum complementa (quæ quidem sunt series Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

quæ ſequitur in hac Tabella: Nempe

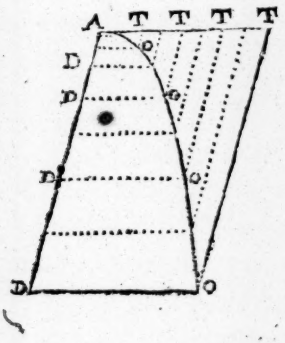
Subſecundanorum	$\frac{2}{3}$	Vel ut 1 ad	$1\frac{1}{2}$.
Subtertianorum	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$.
Subquartanorum	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$.
Subquintanorum	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$.
Subſextanorum	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$.
Subſeptimanorum	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$.
Suboctavanorum	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$.
Subnonanorum	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$.
Subdecimanorum	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$.

Et ſic deinceps.

Patet ex præcedente.

PROP. LV. *Coroll.*

ERgo, *Planum ſemi-parabolæ (vel etiam Parabolæ) eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3. (Et conſequenter ipſius complementum eſt ad idem Parallelogrammum ut 1 ad 3.)*



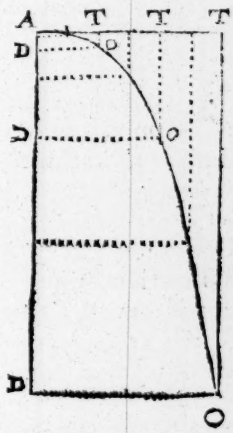
Eſt enim Planum Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) ſeries infinita ſubſecundanorum (per 8 prop Con. Sect.) Parallelogrammum autem ſeries totidem maximæ æqualium: Ergo illud ad hoc ut 1 ad $1\frac{1}{2}$ vel ut 2 ad 3. (et, conſequenter, ipſius complementum, nempe Parallelogrammi reſiduum, ut 1 ad 3.)

PROP.

PROP. LVI. *Corell.*

ITem, *Planum Semi-paraboloidis (vel etiam Paraboloidis) cubicalis, eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut* 3 *ad* 4. (*& conſequenter, ipſius Complementum, eſt ad idem Parallelogrammum, ut* 1 *ad* 4.)

Cum enim (per 45. Prop. Con. Sect.) ordinatim-applicatę in Paraboloide cubicali ſint in ſubtriplicata ratione diametrorum (ſive diſtantiarum a vertice) erit planum ex illis omnibus conflatum ſeries ſubtertianorum; quæ ſe habet ad ſeriem coridem maximo æqualium (hoc eſt, ad Parallelogrammum circumſcriptum,) ut 1 ad 1 $\frac{1}{3}$, ſive ut 3 ad 4. (Et conſequenter, ipſius complementum, nempe parallelogrammi reſiduum, eſt ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)



PROP. LVII. *Corollarium.*

EOdem modo, *Planum Semi-paraboloidis (vel Paraboloidis) Biquadraticalis, Surdeſolidalis, aut ſuperioris cujuſvis poteſtatis, ratio ad Parallelogrammum circumſcriptum nota erit; puta ut* 4 *ad* 5, 5 *ad* 6, *&c. (Et conſequenter, ipſorum etiam complementa ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut* 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*)

Sunt enim illa plana ſeries ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. ideoque, ad ſeries Æqualium, ut 4 ad 5, 5 ad 6: &c. &, conſequenter, eorum complementa (quæ quidem ſunt ſeries Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

SCHOLIUM.

Adeoque & per hanc etiam Tabellam, licet Parabolarum, & Paraboloidium cubicalis, biquadraticalis, aut superioris cujuslibet potestatis, & eorundem etiam Complementorum, aream invenire: quod pollicitus sum ad Prop. 48. Con. Sect. & supra præstiti ad Prop. 45. hujus.

PROP. LVIII. *Lemma.*

TAndem, *ope ejusdem Regulæ* (*prop.* 46.) Si proponatur ejusmodi series infinita quantitatum, a puncto vel 0 inchoatarum, & continuè crescentium, pro ratione Potestatis (non simplicis tantum cujusvis, sed &) compositæ: ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, investigatur. Puta Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. aut etiam Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Vel Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c; aut Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. Aut etiam quocunq; modo compositæ.

Exempli gratia, Cum series subtertianorum (puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,2$, $\sqrt{c}\,3$, &c.) rationem habeant (ad seriem totidem maximæ æqualium) eam quæ est 3 ad 4, seu 1 ad $1\frac{1}{3}$: Eorum quadrata (quę eadem sunt & radices cubicę secundanorum, puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,4$, $\sqrt{c}\,9$, &c.) rationem habebunt ad totidem maximæ æqualia, eam quæ est 1 ad $1\frac{2}{3}$, vel 3 ad 5. Quia nempe 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, vel $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$, sunt arithmetice proportionalia.

Pariter, seriei subquartanorum cubi, vel (quod tantundem est) radices biquadraticæ seriei cuborum vel tertianorum; rationem habebunt ad seriem Æqualium, ut 4 ad 7. Cum enim series subquartanorum rationem habeat in Tabella 1 ad $1\frac{1}{4}$ vel

4

4 ad 5 : eorum cubi rationem habebunt (ad ſeriem totidem maximo æqualium) ut 1 ad $1\frac{3}{4}$, vel 4 ad 7. Quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, vel $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, ſunt Arithmetice-proportionalia, ſicut Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. ſunt Geometrice-proportionalia.

Et ſimiliter in poteſtatibus magis adhuc compoſitis; puta Radices quadraticæ cuborũ ſeriei ſubquintanorum. Nam ſeriei ſubquintanorũ convenit ratio 1 ad $1\frac{1}{5}$ vel 5 ad 6; ergo eorum cubis conveniet ratio 1 ad $1\frac{3}{5}$ vel 5 ad 8 (quia nempe 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, vel $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$, ſunt Arithmetice-proportionalia;) & eorũ Radicibus quadratis, ratio 1 ad $1\frac{3}{10}$, vel 10 ad 13, (quia nempe $1\frac{1}{10}$ eſt medium Arithmeticum inter 1 ad $1\frac{3}{5}$, ſunt enim 1, $1\frac{2}{10}$, $1\frac{6}{10} = 1\frac{3}{5}$ vel $\frac{10}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$, Arithmetice proportionalia,) Vel etiam cum radices quadraticæ ſubquintanorum ſint ſeries ſubdecimanorum; cui convenit ratio 10 ad 11 vel 1 ad $1\frac{1}{10}$: Harum radicum Cubi rationem habebunt eam quæ eſt 10 ad 13 vel 1 ad $1\frac{3}{10}$: Quia 1, $1\frac{1}{10}$, $1\frac{2}{10}$, $1\frac{3}{10}$ vel $\frac{10}{10}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{13}{10}$, ſunt quatuor termini arithmetice proportionales.

Atque eodem modo, in ſeriebus aliarum Poteſtatum utcunque compoſitarum, earundem ratio ad ſeriem æqualium inveſtigabitur. Adeoque ---

PROP. LIX. *Theorema.*

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu o inchoatarum, & continuè creſcentium pro ratione poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus (prop. 44 & 54 memoratis) compoſitæ; erit totius ratio ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella. Nempe

Radices

Series

Radices	Æqualium	Primanorum	Secundanorum	Tertianorum	Quartanorum	Quintanorum	Sextanorum	Septimanorum	Octavanorum	Nonanorum	Decimanorum
	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11
Quadratica	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9	2/10	2/11	2/12
Cubicæ	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	3/9	3/10	3/11	3/12	3/13
Biquadrat.	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10	4/11	4/12	4/13	4/14
Surdesolidæ	5/5	5/6	5/7	5/8	5/9	5/10	5/11	5/12	5/13	5/14	5/15
Sextanæ	6/6	6/7	6/8	6/9	6/10	6/11	6/12	6/13	6/14	6/15	6/16
Septimanæ	7/7	7/8	7/9	7/10	7/11	7/12	7/13	7/14	7/15	7/16	7/17
Octavanæ	8/8	8/9	8/10	8/11	8/12	8/13	8/14	8/15	8/16	8/17	8/18
Nonanæ	9/9	9/10	9/11	9/12	9/13	9/14	9/15	9/16	9/17	9/18	9/19
Decimanæ	10/10	10/11	10/12	10/13	10/14	10/15	10/16	10/17	10/18	10/19	10/20

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

PROP. LX. *Corollarium.*

ERgo, *Conoidea & Pyramidoidea Parabolica & Paraboloidica; quæ nempe Parabolæ, Paraboloidi cubicali, biquadraticali, surdesolidali, &c. aptantur; sunt ad Cylindrum et prisma circumscriptum (vel aliud quodvis super æquali basi æquè altum), ut* 2 *ad* 4, 3 *ad* 5, 4 *ad* 6, 5 *ad* 7. *&c.*

Cum

Cum enim Parabolæ, & Paraboloidum illorum plana ſint ſeries rectarum in ratione ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. ſive ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, ſurdeſolidæ, &c. Primanorum: Conoidea & Paraboloidea ſic aptata, ſunt ſeries planorum in duplicata ratione iſtarum rectarum; & propterea, ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, ſurdeſolidæ &c. ſecundanorum: quibus in tabella aſſignantur rationes illæ 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.

PROP. LXI. *Corollarium.*

Sed & hinc innoteſcit methodus quadrandi non modò Parabolam ſed & Paraboloidea omnia (eorúmq; complementa) non modò ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſimplicis alicujus poteſtatis, (de quibus dictum eſt prop. 55, 56, 57, item prop. 23, 45.) Sed & juxta rationem poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus compoſitæ. Puta; ſi ordinatim-applicatæ ſint in diametrorum ratione duplicatæ ſubtriplicata, ſubquintuplicata, ſubſeptuplicata, &c. vel triplicatæ ſubquadruplicata, ſubquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumſcriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9, &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. Et eorum complementa (quorum ordinatim-applicatæ erunt propterea in ſuarum diametrorum ratione ſubduplicatæ triplicata, quintuplicata, ſeptuplicata, &c. item ſubtriplicatæ quadruplicata, quintuplicata, &c.) rationem habebunt 2 ad 5, 2 ad 7, 2 ad 9, &c. 3 ad 7, 3 ad 8, &c. Et ſimiliter in cæteris: juxta tenorem præcedentis Tabellæ, prop. 59.

Nam ſi ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ſuarum ratione duplicatæ ſubtriplicata, erit planum illud ſeries rectarum cuę ſe habent ad invicem ut quadrata radicum cubicarum (vel radices cubicæ quadratorum) numerorum arithmetice

 propor-

proportionalium ſive ut radices cubicæ ſecundanorum; quibus in Tabellâ convenit ratio 3 ad 5.

Et hujus complementum ordinatim-applicatas habebit in diametrorum ſuarum ratione ſubduplicatæ triplicata (quod tali argumento probabitur, quo uſus ſum ad Prop. 23.) & propterea planum illud erit ſeries radicum quadraticarum cuborum ſive Tertianorum; quibus aſſignatur in Tabellâ ratio 2 ad 5.

Et pariter de aliis judicandum.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ (præter eas quas innuimus ad Prop. 45, & 57.) ad æquales rectilineas reducuntur. Nempe omnia cujuſcunque generis Paraboloidea, & eorum complementa.

PROP. LXII. *Corollarium.*

Atq; exinde etiam patet methodus ad æqualia Cylindros & priſmata reducendi Conoidea & Pyramidoidea omnia Parabolica & Paraboloidica (non modo qualia memorantur prop. 60, ubi planorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſimplicis alicujus poteſtatis, ſed &) etiam quæ aptantur ejuſmodi Paraboloidibus (qualia memorantur prop. 61.) quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſeriei alicujus poteſtatis compoſitæ.

Exempli gratia. Si paraboloidis ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubtriplicatæ-duplicata (vel ſubtriplicata duplicatæ) erit iſtius planum rectarum ſeries infinita in ratione radicum cubicarum ſecundanorum: & propterea Conoides vel Pyramidoides erit ſeries totidem planorum in earundem rectarum ratione duplicata, ideoque radicum cubicarum Quartanorum; & propterea (juxta tabellam Prop. 59.) ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 3 ad 7.

Item, ſi Paraboloidis ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubquadruplicatæ triplicata; erunt plana Conoidis

dis vel Pyramidoidis, in earundem diametrorum ratione ſubquadruplicatæ-ſextuplicata (ſive, quod tantundem valet, ſubduplicatæ triplicata,) ideoque Conoides vel Pyramidoides illud (ex iſtorum planorum ſerie conflatum) ad cylindrum vel Priſma circum-ſcriptum, ut 4 ad 10, vel 2 ad 5.

Et pariter in aliis juxta tenorem Tabellæ.

PROP. LXIII. *Corollarium.*

Eodem modo; Eorundem Semi-Paraboloidum complementis aptata Conoidea & Pyramidoidea, ad æqualia Cylindros & Priſmata reducuntur.

Exſempli gratia. Si ſemi-paraboloidis complementum ordinatim applicatas habeat in diametrorum ratione ſubduplicatæ triplicata, erit planum illud rectarum ſeries infinita in ratione radicum-quadraticarum cuborum ſive Tertianorum, & proinde Conoides vel Pyramidoides huic aptatum, erit ſeries totidem Planorum in earundem rectarum ratione duplicata, adeoque in diametrorum ratione ſubduplicatæ-ſextuplicata (ſeu, quod tantundem valet, in diametrorum ratione triplicata:) erit igitur ad cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 2 ad 8, vel 1 ad 4.

Item, ſi ſemi-paraboloidis complementum ordinatim-applicatas habeat in diametrorum ratione ſubtriplicatæ-quadruplicata; erunt plana Conoidis vel Pyramidoidis in earundem diametrorum ratione ſubtriplicatæ-octuplicata; & propterea ut radices cubicæ octavanorum; adeoque Conoides vel Pyramidoides illud, ad cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 3 ad 11.

Et pariter de aliis judicandum eſt juxta Tabellam præmiſſam.

SCHOLIUM.

Docuimus igitur, quo modo Parabolæ & Paraboliodea omnia cujuſcunque generis, & eorum complementa, ad Parallelogramma: Et eorundem Conoidea & Pyramidoidea ad cylindros & Priſmata; reduci poſſunt. Adeoque infinita Problemata

mata ſolvimus quæ nemo (quantum ſcio) antea ſuſcepit, nedum exſequutus eſt.

Placet autem, adhuc ex Tabellis omnibus præcedentibus (Prop. 44, 54, 59.) hoc univerſale Theorema colligere, (quod quidem convenit cum Regula Prop. 46.) Nempe---

PROP. LXIV. *Theorema.*

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu 0 inchoatarum, & continue creſcentium pro ratione cujuſcunq; poteſtatis, ſive ſimplicis ſive ex ſimplicibus compoſitæ; erit totius ratio, ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ eſt Unitatis ad Indicem iſtius poteſtatis unitate auctum.

Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. (ſive poteſtatis Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) indicem ſtatuo 1, 2, 3, 4, &c. ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. (ſive Radicum quadradraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. primanorum, ſive arithmetice proportionalium) indicem ſtatuo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. Poteſtatis cujuſvis compoſitæ indicem facio ex componentium indicibus compoſitum: Puta ſecundanorum cubi (vel Tertianorum quadrata) indicem habent $6 = 2 \times 3$: ſubſecundanorum Radices cubicæ (vel ſubtertianorum Radices Quadraticæ) indicem habent $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$: Cubi Radicum quadraticarum Quintanorum, indicem habebunt $\frac{1}{2}\frac{5}{5} = 3 \times \frac{1}{2} \times 5$.

Rationes autem his poteſtatibus (in Tabellis) aſſignatæ, ſunt hujuſmodi. Puta, Primanis, Secundanis, Tertianis, Quartanis, &c. 1 ad 2, 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, &c. hoc eſt 1 ad 1 + 1, 1 ad 2 + 1, 1 ad 3 + 1. 1 ad 4 + 1, &c. Subſecundanis, Subtertianis, ſubquartanis &c. 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5 &c. vel 1 ad $1\frac{1}{2}$, 1 ad $1\frac{1}{3}$, 1 ad $1\frac{1}{4}$, &c. hoc eſt 1 ad $\frac{1}{2}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{3}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{4}$ + 1, &c. Tertianorum Quadratis (ſive ſextanis) 1 ad 7, hoc eſt, 1 ad 6 + 1. Tertianorum Radicibus Quadraticis 2 ad 5, ſive 1 ad $\frac{5}{2}$, hoc eſt 1 ad $\frac{3}{2}$ + 1. Subſecundanorum radicibus cubicis (ſive ſubſextanis) 6 ad 7, ſive 1 ad $\frac{7}{6}$, hoc eſt 1 ad $\frac{1}{6}$ + 1. Cubis radicum quadraticarum Quintanorum, (ſive Quindecimanorum

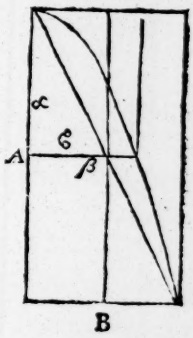
rum radicibus quadraticis,) 2 ad 17, ſive 1 ad $\frac{17}{2}$, hoc eſt 1 ad $\frac{15}{2}+1$. (Et ſic de cæteris.) quod affirmat Theorema. Sin Index ſupponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$; erit ratio, ut 1 ad $1+\sqrt{3}$, &c.

PROP. LXV. *Theorema.*

EX cognita ratione quam habet quælibet ſeries ad ſeriem Æqualium, cognoſcitur ratio quam habet quælibet ad quamlibet aliam.

Exempli gratiâ. Parabola ad triangulum, (hoc eſt ſeries ſubſecundanorum ad ſeriem primanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ vel ut 4 ad 3. Semi-parabolæ complementum ad Triangulum, vel etiam Conus ad Conoides Parabolicum, (hoc eſt ſeries ſecundanorum ad ſeriem primanorum,) ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, vel ut 2 ad 3. Semi-parabola ad ſuum complementum, (hoc eſt ſeries ſubſecundanorum ad ſeriem ſecundanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, vel ut 2 ad 1. Sic Parabola ad paraboloides cubicale, ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, vel ut 8 ad 9: Et Conoides illius ad Conoides hujus, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{5}$, vel ut 5 ad 6. Paraboloides cubicale ad Biquadraticale, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{4}{5}$, vel ut 15 ad 16: Et Conoides illius ad conoides hujus, ut $\frac{1}{5}$ ad $\frac{1}{6}$ vel ut 9, ad 10. Et ſic in aliis.

Intellige; ſi, eaſdem vel æquales habeant & baſes & altitudines (aut ſaltem reciprocatas:) Nam ſi diverſas habeant vel baſes vel altitudines vel utraque, ratio ſerici unius ad aliam, componitur ex rationibus & baſium & altitudinum & ea quæ eſt ſerierum propria. Puta ſi Parabolæ baſis B altitudo A, Trianguli baſis $\mathcal{C}$ altitudo α; erit parabola illa ad Triangulum, ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2}\alpha\mathcal{C}$, vel 4 A B ad $3\alpha\mathcal{C}$ & pariter in cæteris. Item, ſi Trianguli baſis B, altitudo A; & Parabolæ baſis β, altitudo α, erit Parabola ad Triangulum ut $\frac{2}{3}\alpha\beta$ ad $\frac{1}{2}$ A B, vel $4\alpha\beta$ ad 3 A B.



Demonſtratio patet. Cum enim Parabola A B ſit $\frac{2}{3}$ Parallelogrammi A B; & Triangulum $\alpha\mathcal{C}$, $\frac{1}{2}$ Parallelogrammi $\alpha\mathcal{C}$ erit illa ad hoc ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2}\alpha\mathcal{C}$. Et ſimiliter aliis.

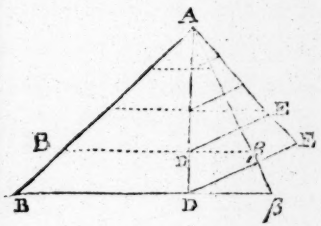
PROP. LXVI. *Theorema.*

EX cognita quantitate ſeriei alicujus integræ, cognoſcitur quantitas ejuſdem obtruncatæ.

Puta, Si A B Triangulum ſit $\frac{1}{2}$ A B Parrallelogrammi; & α C Triangulum, $\frac{1}{2}\alpha$ C Parallelogrammi: erit reſiduum Trapezium, $\frac{1}{2}$ A B $-\frac{1}{2}\alpha$ C. Item A B Parabola $\frac{2}{3}$ A B parallelogrammi circumſcripti; & $\alpha\beta$ parabola $\frac{2}{3}\alpha\beta$ parallelogrammi circumſcripti: erit reſiduum, $\frac{2}{3}$ A B $-\frac{2}{3}\alpha\beta$. Et pariter in aliis. *Fig. Preced.*

PROP. LXVII. *Corollarium.*

SI Triangulum rectis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abſcindentibus;) abſciſſa Triangula (verticem inter & rectas ſecantes) ſunt ut 1, 4, 9, 16, *&c. numeri quadrati. Spacia vero rectis illis interjecta, ut* 1, 3, 5, 7, *&c. Arithmetice-proportionales.*

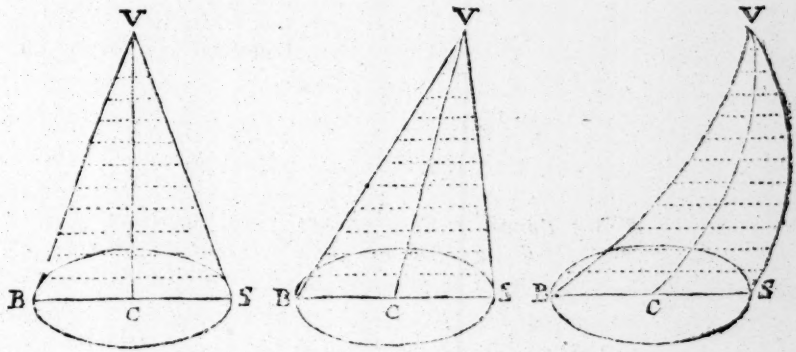


Quia Triangulorum abſciſſorum tam altitudines quam baſes ſunt arithmetice proportionales: ergo plana in duplicata ratione Arithmetice proportionalium, ſive ut numeri quadrati, 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, ſpacia interjecta, $1, 3 = 4 - 1$, $5 = 9 - 4, 7 = 16 - 9$ &c.

PROP. LXVIII. *Corollarium.*

SI conus planis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abſcin-

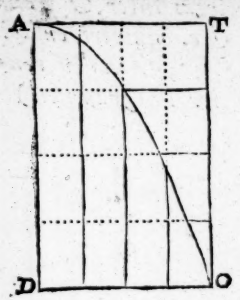
abſcindentibus,) abſciſſi coni (verticem inter & plana ſecantia) ſunt ut 1, 8, 27, 64, *&c. numeri cubici. Portiones vero interjectæ, ut* 1, 7, 19, 37, *&c. differentiæ numerorum cubicorum. (& ſimiliter in Pyramide.)*



Quia cum conorum abſciſſorum altitudines ſint arithmeticè proportionales & propterea etiam baſium diametri; adeoq; baſes in earundem ratione duplicata; erit ratio conorum (quæ ex altitudinum & baſium rationibus componitur) in ratione altitudinum triplicata, ſeu ut 1, 8, 27, 64, &c. Et propterea portiones interjectæ, ut 1, 7 = 8 − 1, 19 = 27 − 8, 37 = 64 − 27. &c.

PROP. LXIX. *Corollarium.*

SI Parabola rectis quotlibet ſecetur (baſi parallelis & æqualiter ab invicem remotis, portiones æquèaltas abſcindentibus,) erunt abſciſſæ parabolæ (verticem inter & rectas ſecantes,) ut 1 √ 1, 2 √ 2, 3 √ 3, 4 √ 4, *&c. vel ut* √1, √8, √27, √64, *&c. radices qua-*

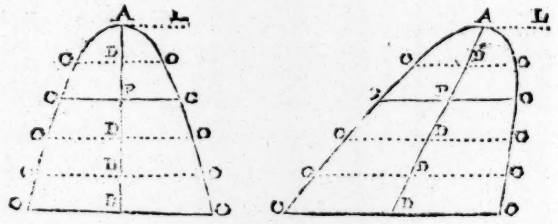


quadratica numerorum cubicorum. Spacia vero interjecta, ut earum radicum differentiæ.

Sunt enim baſes (quippe Ordinatim-applicatæ in parabolâ) in altitudinum ratione ſubduplicata.

PROP. IXX. *Corollarium.*

SI Conoides Parabolicum planis quotlibet ſecetur (baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abſcindentibus æquè-altas,) erunt conoidea ſic abſciſſa (verticem inter & plana ſecantia) ut 1, 4, 9, 16, *&c. numeri quadrati: Et portiones interjectæ, ut* 1, 3, 5, 7, *&c. Arithmetice-proportionales. (Et ſimiliter in Pyramidoide.)*

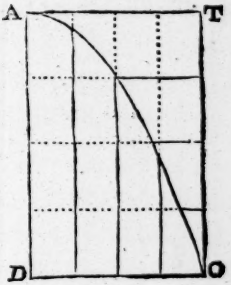


Nempe, ut de Triangulo dictum eſt Prop. 67. ſunt enim conoidum abciſſorum baſes in ratione duplicata ſemidiametrorum hoc eſt ordinatim-applicatarum in parabola; & propterea, altitudinibus proportionales.

PROP.

PROP. LXXI. *Corollarium.*

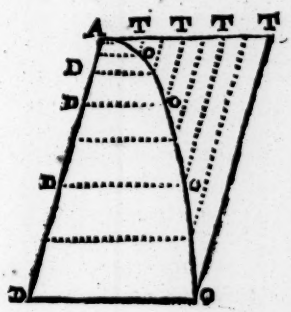
SI complementum ſemiparabolæ rectis quotlibet ſecetur (complementi baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abſcindentibus æquè-altas,) erunt complementa ſic abſciſſa (verticem inter & rectas ſecantes,) ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubici: Et portiones interjectæ, ut 1, 7, 19, 37, &c. numerorum cubicorum differentiæ.



Nempe ut ſupra de Cono dictum eſt, Prop. 68. ſunt enim baſes, hoc eſt, complementorum ordinatim applicatæ, in altitudinum ratione duplicatâ.

PROP. LXXII. *Corollarium.*

SI Conoides etiam *ſemiparabolæ complemento aptatum, planis quotlibet ſecetur (baſi parallelis, & ab invicem æqualiter remotis, portiones abſcindentibus æquè-altas,) erunt abſciſſa conoidea (verticem inter & plana ſecantia) ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri ſurdeſolidi: Et portiones interjectæ, ut 1, 31, 211, 781, &c. numerorum ſurdeſolidorum differentiæ. (Et ſimiliter in Pyramidoide.)*



Sunt enim baſes conoidum abſciſſorum, in duplicata ratione ſemidiametrorũ ſuarum, ideoque in quadruplicata ratione altitudinum, (ſunt enim ipſæ ſemidiametri baſiũ, ſeu ordinatim applicatæ in ſemiparabolæ complemento, in duplicata ratione altitudinum.) Et propterea figuræ ſolidæ abſciſſæ, in altitudinum ratione quintuplicata; quippe quæ componitur ex rationibus baſium & altitudinum.

SCHOLIUM.

Et ſimiliter de aliis ejuſmodi figuris (ſive planis ſive ſolidis) eo modis ſectis, judicandum erit: reſpectu ſemper habito ad gradum ſeu poteſtatem illius ſeriei quo pertinent.

PROP. LXXIII. *Theorema.*

SI duæ quælibet ſeries (aut etiam plures) invicem reſpective-multiplicentur (nempe primus terminus unius in primum alterius, ſecundus in ſecundum, &c.) prodibit ejuſmodi alia ſeries; quæ indicem habebit ex multiplicatarum indicibus aggregatum; rationem autem, ad ſeriem terminorum ipſius maximo æqualium, eam quam Tabellæ præcedentes (vel etiam Propoſitio 64) indicabunt.

Exſempli gratia. Si ſeries quadratorum vel ſecundanorum (cujus index 2) reſpective multiplicetur in ſeriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) prodibit ſeries Quintanorum (cujus index $5 = 2 + 3$:) quæ propterea rationem habebit, ad ſeriem maximo Æqualium, eam quam habet 1 ad $6 = 5 + 1$. Puta ſi reſpective multiplicetur

Series ſecundanorum	$0a$,	$1a$,	$4a$,	$9a$,	$16a$, &c.
in ſeriem Tertianorum	$0b$,	$1b$,	$8b$,	$27b$,	$64b$, &c.
prodibit ſeries quint.	$0ab$,	$1ab$,	$32ab$,	$243ab$,	$1024ab$, &c.

Item, ſi ſeries ſecundanorum (cujus index 2) reſpective multiplicetur in ſeriem ſubtertianorum (cujus index $\frac{1}{3}$,) erit producta ſeries, Radices-cubicæ ſeptimanorum (cujus index

eſt

est $\frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{3}$;) quæ est ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad $\frac{10}{3} = \frac{7}{3} + 1$, vel ut 3 ad 10. Puta si respective multiplicetur

Series $0a$, $1a$, $4a$, $9a$, &c.
in seriem $\sqrt[3]{0}b$, $\sqrt[3]{1}b$, $\sqrt[3]{2}b$, $\sqrt[3]{3}b$, &c.

hoc est series $\sqrt[3]{0}a^3$, $\sqrt[3]{1}a^3$, $\sqrt[3]{64}a^3$, $\sqrt[3]{729}a^3$, &c.
in seriem $\sqrt[3]{0}b$, $\sqrt[3]{1}b$, $\sqrt[3]{2}b$, $\sqrt[3]{3}b$, &c.
prodibit series
$\sqrt[3]{0}a^3b$, $\sqrt[3]{1}a^3b$, $\sqrt[3]{128}a^3b$, $\sqrt[3]{2187}a^3b$, &c.

Item, si series subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective multiplicetur in seriem subquintanorum (cujus index $\frac{1}{5}$) erit producta series Radices-Decimanæ septimanorum, (cujus index $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$) & propterea rationem habebit, ad seriem maximæ æqualium, eam quam habet 1 ad $\frac{17}{10} = \frac{7}{10} + 1$, vel 10 ad 17. Puta si respective multiplicetur.

Series $\sqrt[2]{0}a$, $\sqrt[2]{1}a$, $\sqrt[2]{2}a$, $\sqrt[2]{3}a$, &c.
in seriem $\sqrt[5]{0}b$, $\sqrt[5]{1}b$, $\sqrt[5]{2}b$, $\sqrt[5]{3}b$, &c.
hoc est, series
$\sqrt[10]{0}a^5$, $\sqrt[10]{1}a^5$, $\sqrt[10]{32}a^5$, $\sqrt[10]{243}a^5$, &c.
in seriem $\sqrt[10]{0}b^2$, $\sqrt[10]{1}b^2$, $\sqrt[10]{4}b^2$, $\sqrt[10]{9}b^2$, &c.
prodibit series
$\sqrt[10]{0}a^5b^2$, $\sqrt[10]{1}a^5b^2$, $\sqrt[10]{128}a^5b^2$, $\sqrt[10]{2187}a^5b^2$, &c.

Et similiter in aliis ejusmodi multiplicationibus continget.

PROP. LXXIV. *Corollarium.*

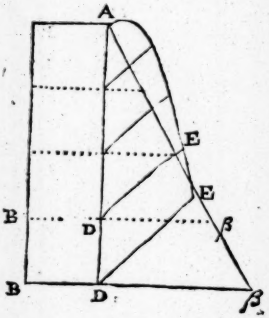
IDeoq; *Ubi Aggregatum Indicum serierum invicem respective multiplicatarum idem est, ibi et idem erit Index seriei productæ.*

Exempli gratia. Si series tertianorum in seriem Tertianorum, vel series secundanorum in seriem Quartanorum, vel series Primanorum in seriem Quintanorum, vel series Æqualium in seriem sextanorum, respective multiplicetur; Prodibit series sextanorum. Quia nempe in singulis

aggregatum indicum est 6, (nam 3+3=2+4=1+5=0+6=6.) Et similiter in aliis.

PROP. LXXV. *Corollarium.*

SI ADB Parallelogrammi rectæ omnes DB, in Dβ rectas Trianguli ADβ (æque-alti) respective-ducantur; rectangula producta erunt series primanorum (qualia sunt plana cunei Parabolici, prop. 11. Con. Sect.) pro quibus si substituantur totidem Quadrata (vel quævis aliæ figuræ planæ similes) illis æqualia, constituetur Pyramidoides Parabolicum: Et eorum Quadratorum (vel figurarum similium) latera, vel mediæ proportionales inter rectas sic multiplicatas, DE, constituent Parabolam, vel Semiparabolam.



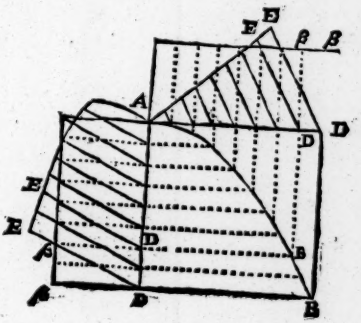
(Intellige, si plana illa, vel mediæ proportionales, quæ sic emergunt, supponantur ad rectam aliquam ita ordinatim-posita ut figurarum constituendarum natura postulat. quod & deinceps aliquoties intelligendum erit.)

Nam, cum rectæ Parallelogrammi, sint series Æqualium (cujus index o;) & rectæ Trianguli, series primanorum, (cujus index 1:) producetur, multiplicando, series item primanorum (quia o+1=1.) qualia sunt plana cunei Parabolici, & Pyramidoidis Parabolici, (per Prop. 9, 11. Con. Sect.) & mediæ proportionales (seu latera similium planorum) erunt series subsecundanorum (quippe ut Radices quadraticæ primanorum) quales sunt parabolarum rectæ per Prop. 8. Con. Sect.

PROP.

PROP. LXXVI. *Coroll.*

SI ADβ Parallelogrammi rectæ βD in rectas DB ſemiparabolæ æquè-altæ ADB reſpectivè ducantur, rectangula producta erunt ſeries ſubſecundanorum; & mediæ proportionales, ſeries ſubquartanorum (quales ſunt rectæ Paraboloidis Biquadratici DE.)



Hoc eſt, ſeries Æqualium (cujus index o) in ſeriem ſubſecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) reſpective ducta efficiet ſeriem item ſubſecundanorum (quia $\frac{1}{2} + o = \frac{1}{2}$) & mediæ proportionales (quippe ſubſecundanorum radices quadraticæ) erunt ſeries ſubquartanorum.

PROP. LXXVII. *Coroll.*

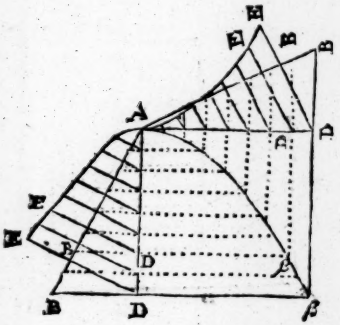
SI ADβ Parallelogrammi rectæ Dβ in rectas DB Complementi Semiparabolæ reſpectivè ducantur; rectangula producta erunt ſeries ſecundanorum: mediæ autem proportionales, ſeries primanorum (Triangulum conſtituentium, ADE.)

Nempe, ſeries Æqualium in ſeriem ſecundanorum ſic ducta, dat ſeriem etiam ſecundanorum (quia $o + 2 = 2$) eorumque radices quadraticæ ſunt ſeries primanorum.

PROP.

PROP. LXXVIII. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respectivè ducantur in rectas semiparabolæ Dβ, rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Tertianorum, & mediæ proportionales, radices Biquadraticæ Tertianorum, DE.



Nempe, series primanorum in seriem subsecundanorum sic ducta, dabit seriem radicum quadraticarum Tertianorum (quia $1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$.) quarum radices quadraticæ, sunt radices biquadraticæ Tertianorum.

PROP. LXXIX. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respective ducantur in rectas Complementi semiparabolæ Dβ; producta rectangula sunt series Tertianorum (quia 1 + 2 = 3.) Et mediæ proportionales, radices quadraticæ Tertianorum. DE.

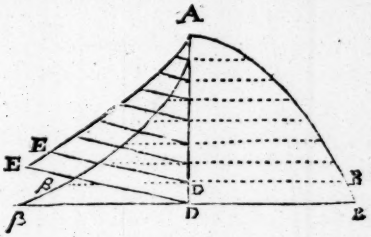
Demonstratur ut præcedentes.

PROP. LXXX. *Corollarium.*

SI rectæ complementi semiparabolæ in rectas semiparabolæ respective ducantur; rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Quintanorum (quia

2 +

$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$;) *& mediæ proportionales, ſeries radicum*



biquadraticarum Quintanorum. Ut patet.

SCHOLIUM.

Et pari modo de figuris ſive planis ſive ſolidis, quæ ex ejuſmodi multiplicatione provenient, judicandum erit. Ut ſi trianguli unius rectæ in rectas Trianguli alterius (ſive ſimilis ſive diſſimilis, modo æque alti) reſpective ducantur, fiet Pyramis; mediæ vero proportionales conſtituent etiam Triangulum. Semiparabolæ unius rectæ in rectas alterius reſpective ductæ, efficient Pyramidoides Parabolicum; mediæ autem proportionales ſemi parabolam. Et ſic de cæteris.

PROP. LXXXI. *Theorema.*

SI unius Seriei termini omnes per terminos alterius Seriei reſpectivè dividantur, quotientes erunt ſeries alia, cujus index reperitur ſubducendo indicem ſeriei Dividentis ex indice ſeriei diviſæ, quod reſtat enim eſt index ſeriei diviſione provenientis, ſive Quotientis: Ratio autem quam habitura eſt ſeries ſic producta, ad ſeriem totidem terminorum ipſius maximo æqualium, ea erit quam Tabellæ præcedentes (vel propoſitio 64) indicant.

Exſempli gratia. Si ſeries Biquadratorum vel quarta-

norum

norum (cujus index 4) dividatur per ſeriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3) quotientes erunt ſeries lateralium ſeu Primanorum, cujus index 1 = 4 − 3.

Tert.	Quart.	Prim.
0 c)	0 q q	(0 l
1 c)	1 q q	(1 l
8 c)	16 q q	(2 l
27 c)	81 q q	(3 l
&c.	&c.	&c.

Si ſeries tertianorū dividatur per ſeriem Primanorum proveniet ſeries ſecundanorum, cujus index 2 = 3 − 1. Et ſi ſeries ſecundanorum per ſeriem ſecundanorum dividatur, proveniet ſeries æqualium, cujus index 0 = 2 − 2. Et ſic de cæteris.

Prim.)	Tert.	(Secund
0 l)	0 c	(0 q
1 l)	1 c	(1 q
2 l)	8 c	(4 q
3 l)	27 c	(9 q
	&c.	

Demonſtratio patet ex Prop. 73. Quia nempe ſeries Tertianorum in ſeriem primanorum reſpective ducta efficiet ſeriem Quartanorum. Et ſeries primanorum in ſeriem ſecundanorum ſic ducta efficiet ſeriem tertianorum. Et ſeries ſecundanorum in ſeriem Æqualium ſic ducta, producet ſeriem ſecundanorum. Et ſic in reliquis omnibus. quod enim multiplicatione conficitur, id Diuiſione reſolvitur.

Sec.	Sec.	Æqual.
0 q)	0 q	(1
1 q)	1 q	(1
4 q)	4 q	(1
9 q)	9 q	(1
	&c.	

PROP. LXXXII. *Corollarium.*

IDeoq; , *ubi idem eſt graduum ſive indicum exceſſus ſeriei Dividendæ ſupra ſeriem Dividentis , idem erit ſeriei Quotientum index.*

Exſempli gratia. Si ſeries ſextanorum per ſeriem quartanorum, vel ſeries quintanorum per ſeriem Tertianorum, vel ſeries quartanorum per ſeriem Secundanorum, vel ſeries Tertianorum, per ſeriem Primanorum dividatur; proveniet ſeries Secundanorum. quia nempe in ſingulis ſeries Diviſa ſeriem Dividentem duobus gradibus ſuperat; eſt enim 6 − 4 = 5 − 3 = 4 − 2 = 3 − 1 = 2 − 0 = 2) Ideoque per præced.) idem ſeriei provenientis Index. Et pariter in aliis.

PROP.

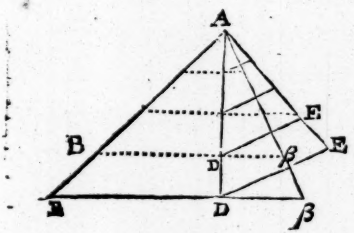
PROP. LXXXIII. *Coroll.*

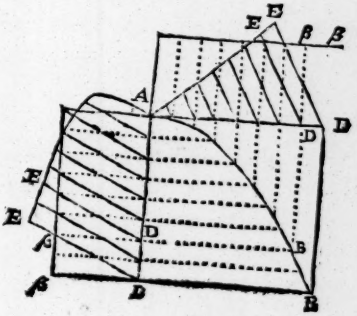
SI Pyramis (seriesnempe Secundanorum) ad Triangulum (æquè-altum) respectivè applicetur (nempe plana illius ad Rectas hujus) prodibit Triangulum; (quia nempe $2 - 1 = 1$.*) Si vero applicetur ad complementum semi-parabolæ, prodibit Parallelogrammum; (quia* $2 - 2 = 0$.*) Si ad semiparabolam, planum prodiens erit series Radicum quadraticarum Tertianorum; (quia* $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.*) Si ad seriem Æqualium, prodibit complementum semiparabolæ; (quia* $2 - 0 = 2$.*) Et sic in aliis.*

Patet ex Prop 81.

PROP. LXXXIV. *Coroll.*

VEL, si respectivis rectis Trianguli primi ADB & secundi ADE, sumantur tertiæ proportionales; prodibit Triangulum tertium ADβ: Si respectivis rectis complementi semiparabolæ ADB, & Trianguli





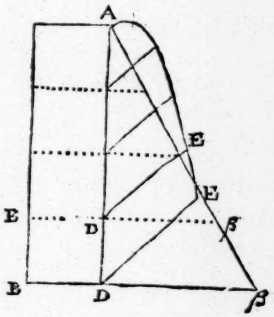
ADE, prodibit parallelogrammum ADβ: Si vero Pa-

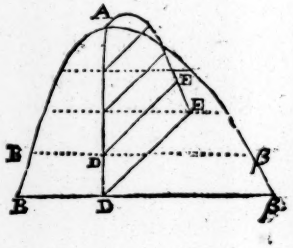
rallelogrammi ADβ & Trianguli ADE, prodibit complementum ſemiparabolæ ADB.

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in Triangulo conſtituunt Pyramidem. Et ſimiliter in reliquis. Oſtenditur autem pars prima in figura priori; ſecunda & tertia in poſteriori.

PROP. LXXXV. *Corollarium.*

SI Pyramidoides Parabolicum (ſeries nempe Primanorum) ad Triangulum (æquè-altum) reſpectivè applicetur: prodibit Parallelogrammum; (quia $1 - 1 = 0$. *) Si ad parallelogrammum, prodibit Trian-*





gulum; (quia $1 - 0 = 1$. *) Si ad ſemiparabolam, prodibit ſemiparabola; (quia* $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. *) Si ad ſemi-paraboloides cubicale, planum prodiens conſtabit ex ſecundanorum radicibus cubicis; (quia* $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. *) Et pariter in aliis ejuſmodi applicationibus.*

Patet ex Prop. 81.

PROP.

PROP. LXXXVI. *Corollarium.*

SImiliter. *Si reſpectivis rectis Trianguli ADβ, & ſemiparabolæ ADE, ſumantur tertiæ proportionales, prodibit Parallelogrammum ADE: ſi reſpectivis rectis Parallelogrammi ADB, & ſemiparabolæ ADE prodibit Triangulum ADβ: ſi reſpectivis rectis ſemiparabolæ primæ ADB, & ſecundæ ADE, prodibit ſemiparabola tertia ADβ: & ſic in aliis.*

Sequitur ex præcedente. quadrata enim rectarum in ſemiparabola, conſtituent Pyramidoides Parabolicum. Oſtenditur, in fig. præced.

SCHOLIUM.

Et pari modo de aliis figurarum ſolidarum ad Planas applicationibus reſpectivis judicium fiet. Sufficit paucas exſempli cauſa indicaſſe, ad quarum imitationem fieri poſſunt innumeræ aliæ.

PROP. LXXXVII. *Theorema.*

SI proponatur ſeries quælibet prædictarum per aliam ſuperioris gradus ſeu poteſtatis dividenda, nulla jam memoratarum ſeries prodire poterit, (cum index poteſtatis ſuperioris ex indice poteſtatis inferioris, major quippe ex minore, auferri non poſſit:) ſed aliuſmodi plane ſeries, cujus nempe termini ſunt reciprocè proportionales homologis terminis alterius ſeriei, quæ indicem habet æqualem exceſſui indicis ſeriei dividentis ſupra indicem ſeriei diviſæ.

Series autem ſic provenientes, ſeries *Reciprocæ* appellentur, habeantq; Indices negativos.

Exſempli gratia. Si ſeries Secundanorum dividenda ſit per ſeriem Tertianorum, vel ſeries Primanorum, per ſeriem ſecundanorum, vel ſeries Æqualium per ſeriem Primanorum, (ubi ſeri-

es dividens est uno gradu superior serie dividenda, adeoque index seriei dividentis unitate major quam index seriei divisæ, puta $3 - 2 = 2 - 1 = 1 - 0 = 1$:) termini seriei oriundæ erunt reciproce proportionales homologis terminis seriei primanorum. Puta si respective dividatur

series	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
per seriem	$0a^3$,	$1a^3$,	$8a^3$,	$27a^3$,	$64a^3$,	&c.
vel series	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
per seriem	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
vel series	1,	1,	1,	1,	1,	&c.
per seriem	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
prodibit series	$\frac{1}{0a}$,	$\frac{1}{1a}$,	$\frac{1}{2a}$,	$\frac{1}{3a}$,	$\frac{1}{4a}$,	&c.

cujus seriei termini sunt reciproce proportionales homologis terminis seriei primanorum $\frac{0a}{1}$, $\frac{1a}{1}$, $\frac{2a}{1}$, $\frac{3a}{1}$, $\frac{4a}{1}$, &c. ut patet. Nempe $\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{3a} :: \frac{3a}{1} \cdot \frac{2a}{1}$. Et sic ubique.

Eodem modo si series primanorum dividenda sit per seriem tertianorum; vel (quod tantundem valet) series Æqualium per seriem Secundanorum; erit series proveniens seriei secundanorum reciproce proportionalis. puta

$$\frac{1}{0a}, \quad \frac{1}{1a}, \quad \frac{1}{4a}, \quad \frac{1}{9a}, \quad \frac{1}{16a}, \quad \&c.$$

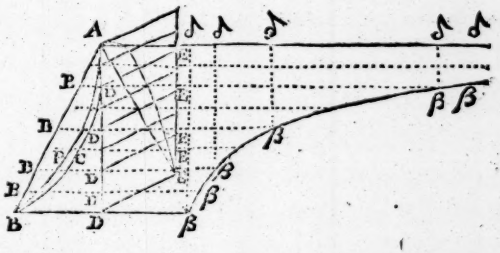
Et pari modo in omnibus ejusmodi divisionibus continget.

PROP. LXXXVIII. *Coroll.*

Si infinita plana (parallela) Parallelepipedi, ad totidem rectas Trianguli (æquè-alti) applicentur; (vel si respectivis rectis Trianguli, & Parallelogrammi, sumantur tertiæ proportionales;) series rectarum provenientium erit reciproca Seriei Primanorum, quæ quidem recta

rectæ sunt suis a vertice distantiis (vel, si placet, diametris interceptis,) reciproce-proportionales.

Esto enim Parallelepipedum, cujus infinita plana æquentur quadratis totidem rectarum Parallelogrammi A D E, quæ si applicentur ad rectas Trianguli A D B, prodibunt rectæ (rectis trianguli & Parallelogrammi tertiæ proportionales) figuram A D β mixtam constituentes, quæ reciproce proportionales erunt tam homologis rectis Trianguli (quia nempe cum illis constituunt rectangula æqualia) quam Diametris interceptis, seu distantiis a vertice, quæ (propter similia Triangula abscissa) sunt illis trianguli rectis proportionales.



PROP. LXXXIX. *Coroll.*

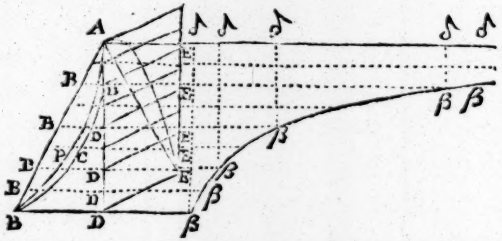
Idem continget, si Plana Pyramidis (quadratis rectarum Trianguli A D E æqualia) applicentur ad totidem Rectas Complementi Semiparaboloidis Cubicalis A D E C.

Patet ex Prop. 87. Nam (ut in Prop. præced.) series primanorum ex quibus constatur Triangulum, est uno gradu superior, quam series Æqualium, ex quibus constat Parallelepipedum: Sic (in hac Prop) series Tertianorum in complemento semiparaboloidis cubicalis est in uno gradu superior quam series secundanorum ex quibus constat Pyramis. Utrobique igitur provenit series serici Primanorum reciproca.

PROP.

PROP. XC. *Corollarium.*

Idem continget, ſi Plana Pyramidoidis Parabolici (hoc eſt, ſeries Primanorum,) æqualia quadratis rectarum ſemiparabolæ ADE reſpective applicentur ad rectas complementi ſemiparabolæ ADβ. (Seriem nempe Secundanorum.)



Nam & hic index ſeriei dividentis unitate ſuperat indicem ſeriei dividendæ.

PROP. XCI. *Corollarium.*

Figura plana ex ſeriè rectarum Primanis reciproce proportionalium conflanda, eſt interminabilis. Quod & ſimiliter verum eſt de omnibus ſeriebus Reciprocis.

Cum enim primus terminus in ſerie Primanorum ſit o, primus terminus in ſerie reciproca erit ∞ vel infinitus: (ſicut, in diviſione, ſi diviſo ſit o, quotiens erit infinitus.) adeoq; recta A ♪, & curva ββ, non niſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) concurrent.

Pari ratione neque concurrent (niſi poſt infinitam diſtantiam) eadem curva ββ & recta AD (quantumvis utraq; continuetur) non prius enim evaneſcet diſtantia Dβ quam facta fuerit infinita recta DB & propterea ·····

PROP.

PROP. XCII. *Corollarium.*

Curva ββ duas habet Asymptotas rectas AS, AD. Quod & de aliis ejusmodi Curvis rectarum, series reciprocas terminantibus, verum est.

Nempe ita perpetuo propius accedunt ad curvam rectæ, ut tandem earum distantia sit quavis assignabili minor, (ut ex dictis facile est probatu,) neque tamen unquam concurrent, ut jam ostensum est. Atque idem de aliis ejusmodi curvis pariter ostendi poterit.

PROP. XCIII. *Corollarium.*

Rectæ (Dβ, Dβ, &c.) Primanis reciprocè proportionales ab infinitâ (AS = ∞) continue decrescunt, (eadem ratione qua respective rectæ DB, DB, in serie primanorum a puncto A = 0 continue crescunt,) donec pervenitur ad minimam, (sicut in serie primanorum pervenitur ad maximam.) Quod verum est & in aliis seriebus reciprocis.

Patet, propter proportionem reciprocam.

PROP. XCIV. *Corollarium.*

In Figura ADββ, (ex primanorum reciprocis) Parallelogramma inscripta ALβ, ALβ, &c. sunt invicem æqualia.

Habent enim bases & altitudines reciprocas per Prop. 88.

PROP. XCV. *Corollarium.*

Et propterea, Ipsa curva ββ est Hyperbola; cujus centrum A, Asymptotæ AD, AS.

Per Prop. 12. lib. 2. Apollonii.

PROP.

PROP. XCVI. *Corollarium.*

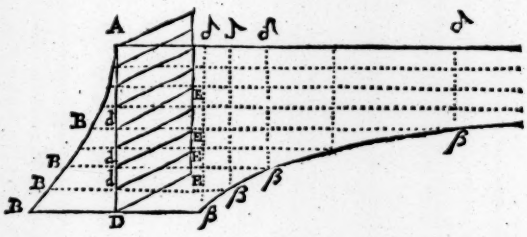
Si chorda muſica AD varie dividatur in punctis D D, &c. ſonos edet proportionales rectis D β, D β, &c.

In Fig. præced.

Nam (per principia muſica) eadem chorda (æquabilis & æqualiter tenſa) ſonos edit longitudinibus reciproce proportionales. Ideoque ſi chordæ ſint ut A D, A D, &c. ſoni erunt ut D β, D β, &c. per Prop. 88.

PROP. XCVII. *Coroll.*

Si plana Parallelepipedi (quippe ſeries æqualium) æqualia quadratis rectarum Parallelogrammi ADE ad reſpectivas rectas Complementi Semiparabolæ ADB (ſeriem ſcil. ſecundanorum) applicentur; prodibit ſeries rectarum ſecundanis reciprocè proportionalium: Ex quibus ſi ſupponatur conflari figura plana ADβ, erit ea interminabilis; & curva illas terminans duas habebit Aſymptotas rectas A D, A β.



Probatur eodem modo quo propoſitiones aliquot præcedentes de ſerie reciproca ſerici Primanorum.

PROP. XCVIII. *Coroll.*

Idem continget, ſi plana pyramidis ſic applicentur ad rectas complementi ſemi-paraboloidis Biquadraticalis; vel

vel plana pyramidoidis parabolici ad rectas complementi paraboloidis cubicalis.

Nam & istic index seriei dividentis binario superat indicem seriei dividendæ.

PROP. XCIX. *Corollarium.*

IN ejusmodi serie secundanis reciprocâ, rectæ D β, d β, &c. sunt in reciprocæ rationis Diametrorum (vel distantiarum a vertice) ratione duplicata, (sive ut dAq DAq, &c.)

Quia nempe reciproce-proportionales sunt rectis D B, d B, &c. quæ sunt in diametrorum A D, A d &c. rationis directæ ratione duplicata. Puta

dAq. DAq :: dB. DB :: Dβ. dβ. Ergo $\frac{dAq}{DAq} = \frac{D\beta}{d\beta}$.

PROP. C. *Corollarium.*

IN Figura plana (AD ββ) ex serie rectarum secundanis reciprocarum conflata, inscripta parallelogramma (AD β, Ad β,) sunt interceptis diametris (D A, d A,) reciproce proportionalia.

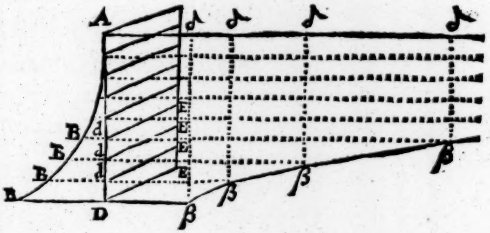
Sunt enim (per 23. e 6) ut D A * D β ad d A * d β. Est autē per præced.) $d\beta = \frac{DAq}{dAq} D\beta$: Et $dA * d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$.

Ergo & $DA * D\beta . dA * d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$ :: dA * DA * Dβ. DAq * Dβ :: dA. DA.

PROP. CI. *Corollarium.*

SI verò figura plana (AD ββ) fit ex serie rectarum Tertianis reciprocarum conflata; (quæ nempe sint rectis complementi paraboloidis cubicalis ADB, & Parallelo-

grammi ADE, tertiæ proportionales;) erunt rectæ illæ (Dβ, dβ, &c.) in reciprocæ rationis Diametrorum (DA, dA, &c.) ratione triplicata (ſcil. ut dAc, DAc, &c.) Et Parallelogramma inſcripta ADβ, Adβ, &c.) in reciprocæ rationis diametrorum ratione duplicatâ. (ſive ut dAq, DAq, &c.)



Eſt enim (ex conſtructione) $D\beta . d\beta :: dB . DB :: dAc . DAc$. Et propterea etiam $d\beta = \frac{DAc}{dAc} D\beta$. Ergo Parallelogramma $ADβ . Adβ :: DA \times Dβ . dA \times dβ = \frac{dA \times DAc}{dAc} Dβ = \frac{DAc}{dAq} Dβ :: dAq \times DA \times Dβ . DAc \times Dβ :: dAq . DAq$. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo de aliis ejuſmodi figuris planis ex qualibet rectarum *ſerie reciproca* conflatis judicandum erit; ut & de Parallelogrammis (ſive rectangulis ſive obliquangulis, prout ſitus figuræ poſtulat,) ipſis inſcriptis.

Quod ad Aream autem attinet iſtarum figurarum ex ſeriebus reciprocis conſtantium; quærenda eſt illa eodem fere modo quo ſupra in ſeriebus directis. Ubi autem ſeries directæ indices habent 1, 2, 3, &c. ut quæ ſupra ſeriem Æqualium tot gradibus aſcendunt; habebunt hæ quidem (illis reciprocæ) ſuos indices contrarios negativos $-1, -2, -3$, &c. tanquam tot gradibus infra ſeriem Æqualium deſcendentes. Prout autem illæ ab o ciphra vel Nihilo continuo creſcunt, hæ contra ab ∞ Infinito continue decreſcunt; atque ut illic terminus maxi-

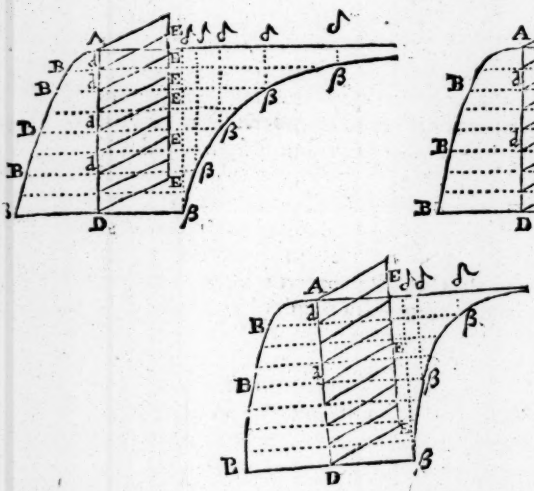
mus

mus, hic minimus, seriem claudit: (quæ tamen & pro arbitrio continuanda supponitur, quousque libet illic crescendo, hic decrescendo.) Adeoque, ut illic figura Circumscripta (parallelogrammum puta vel prisma) sive series totidem terminorum Maximo æqualium; hic, figura Inscripta, sive series totidem terminorum Minimo æqualium, habenda est pro communi mensura ad quam facienda est comparatio; utrobique ad illum terminum respectu habito qui seriem claudit.

Neque interim mirum cuiquam videatur (ut ut fortassis inexspectatum) si figuræ interminatæ rationem ad datam aliam terminatam inquiram. Quamvis enim hujusmodi figuræ A D β (ut ut ex parte D β ad libitum terminatæ, uti modo in his scholiis dictum est) supponantur ex parte ♪ β in infinitum continuatæ (per Prop. 91.) non tamen propterea vel nullam vel semper infinitam rationem habituræ sunt ad datam figuram terminatam, puta ad parallelogrammum æque altum super eadem basi D β descriptum. Quod eo quidem facilius assensum obtinere posse videatur, cum id ipsum in una quadam figura solida (quam *Hyperbolicam acutam infinitam* vocat) jam ostenderit Torricellius. Sed neque semper rationem habituræ sunt finitam, sed aliquando vel infinitam, vel etiam (si id fine solœcismo dici possit) majorem quam infinitam. Nempe, si eadem ratione abbreviantur rectæ ♪ β, qua prolongantur rectæ D β, erit ea ratio infinita; ubi nempe prolongatio unius æquipollet abbreviationi alterius, (& propterea figuræ infinitæ continuatæ ratio ex utraque composita æquipollet figuræ alicui æquabiliter in infinitum continuandæ:) Si vero minori ratione abbreviantur rectæ ♪ β quam prolongentur D β, futura est ratio plusquam infinita; tunc enim prolongatio harum præpollet (seu plusquam æquipollet) illarum abbreviationi: Si autem majori ratione decrescunt rectæ ♪ β quam crescunt rectæ D β, præpollet earum decrementum incremento harum; adeoq; futura est ratio finita, minor siquidem quam infinita. (Et quidem secundum hoc κεφάλαιον, non modo de figuris hisce quas jam tractamus, sed de aliis etiam quibusvis interminabilibus, sive planis sive solidis, ad terminatas aliquas comparatis, judicandum erit: quæ, credo, speculatio non videbitur injucunda.) Quæ autem futura est in singulis ratio, sequentibus aliquot propositionibus (regulam Prop. 64 secuti) indicabimus.

PROP. CII. *Theorema.*

SI figura ADβ verticem habeat Aα infinitum, & perpetuò decreſcat ad baſin uſq; Dβ, ſecundum ſeriem aliquam reciprocam ſeriei cuilibet directæ (earum puta quæ prop. 59. memorantur,) quæ indicem habeat minorem quam 1; habebit illa ad parallelogrammum ſuper eâdem baſi æque-altum rationem finitam; eam nempe quam habet 1 ad iſtius ſeriei reciprocæ indicem unitate auctum.



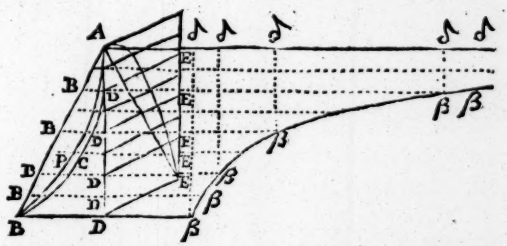
Exempli gratia; ſunto ſeries directæ ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. quarum, indices $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. (unitate minores;) ſeries his reciprocæ indices habebunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (Nam ſi ſupponatur ſeries æqualium, cujus index 0, per illas dividi, ſeries diviſione

divisione provenientes habebunt indices $0 - \frac{1}{2}$, $0 - \frac{1}{3}$, $0 - \frac{1}{4}$, &c. hoc est $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (per Prop. 81.) quibus si (juxta regulam Prop. 64.) addatur 1, fient $-\frac{1}{2} + 1$, $-\frac{1}{3} + 1$, $-\frac{1}{4} + 1$, &c. hoc est, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & propterea ratio totius figuræ ad parallelogrammum inscriptum (super eadem basi æquealtum) ut 1 ad $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. vel ut 2 ad 1, 3 ad 2, 4 ad 3, &c.

Et pari modo, si sumatur series reciproca seriei radicum cubicarum secundanorum, vel radicum biquadraticarum secundanorum, aut tertianorum, vel radicum surdesolidarum secundanorum, tertianorum, aut quartanorum, (quarum indices sunt $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,) aut alii cuivis seriei, cujus index est unitate minor. Quia reciprocarum serierum indices negativi his contrarii (puta $-\frac{2}{1}$, $-\frac{3}{1}$, &c.) additione unitatis fient affirmativi, adeoque ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, erit ratio finita; quippe numeri positivi ad positivum.

PROP. CIII. *Theorema.*

SI vero ejusmodi Figura ADBβ sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitati æqualem (nempe seriei Primanorum;) habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem infinitam: eam nempe quæ est 1 ad 0.

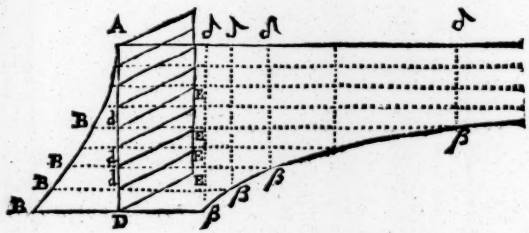


Cum enim series primanorum indicem habeat 1, series hinc reciproca indicem habebit -1, ideoque per

per Prop. 64.) ratio proveniens erit 1 ad $-1+1$. hoc eſt 1 ad 0.

PROP. CIV. *Theorema.*

SI deniq; ejuſmodi Figura $AD\beta\beta$, ſic continuo decreſcat juxta ſeriem quæ ſit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem; habebit illa ad Parallelogrammum inſcriptum rationem plus-quam infinitam: qualem nempe habere ſupponatur numerus poſitivus ad numerum negativum, ſive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum.



Puta cum indices ſeriei ſecundanorum, Tertianorum Quartanorum, &c. ſint 2, 3, 4, &c. (unitate majores,) indices ſerierum illis reciprocarum erunt -2, -3, -4, &c. qui quamvis unitate augeantur (juxta Prop. 64.) manebunt tamen negativi, puta $-2+1=-1$, $-3+1=-2$, $-4+1=-3$, &c. & propterea ratio quam habet 1 ad indices illos ſic auctos, puta 1 ad -1, 1 ad -2, 1 ad -3, &c. major erit quam infinita, ſive 1 ad 0; quia nempe rationum conſequentes ſunt minores quam 0.

Atque idem continget, ſi ſumatur reciproca ſeriei radicum quadraticarum Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum &c. (cujus indices ſunt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c.) vel indicum cubicarum Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. (cujus indi-

ces

ces ſunt $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, &c.) aut cuivis denique ſeriei cujus index eſt unitate major. Ut patet.

PROP. CV. *Theorema.*

SI ejuſmodi figura AD$\beta\beta$ verticem habens Aδ infinitum & baſin Dβ determinatam, rationem habeat ad inſcriptum parallelogrammum AD$\beta\delta$ majorem quam infinitam: eadem figura AD$\beta\beta$ verticem habens AD infinitum & baſin $\delta\beta$ determinatam, rationem habebit ad inſcriptum Parallelogrammum A$\delta\beta$D minorem quam infinitam (finitam nempe:) Et contra, ſi ſitu illo conſiderata rationem habeat minorem quam infinitam; ſitu hoc habebit rationem majorem quam infinitam: Si deniq; in ſitu uno rationem habeat ſimpliciter infinitam (puta neq; majorem neq; minorem) etiam & ſitu altero habebit rationem ſimpliciter infinitam.

Nam verbi gratia, in ſerie ſecundanis reciproca, cum ſint (per Prop. 99.) rectæ Dβ, Dβ, in diametrorum AD, AD, ratione reciprocæ duplicatæ: erunt e converſo rectæ AD, AD, hoc eſt $\delta\beta$, $\delta\beta$, in rectarum Dβ, Dβ, hoc eſt, diametrorum Aδ, Aδ, ratione reciprocæ ſubduplicata; adeoque ipſæ $\delta\beta$, $\delta\beta$ &c. ſunt ſeries ſecundanis reciproca. Et contra. Atque (cum idem etiam in aliis ejuſmodi ſeriebus contingat) patet propoſitum per Prop. 102, & 104.

In ſerie vero primanis reciproca; cum (per Prop. 88.) rectæ Dβ, Dβ, ſint diametris AD, AD, reciproce proportionales; erunt etiam rectæ $\delta\beta$ $\delta\beta$ diametris ſuis Aδ, Aδ, reciproce proportionales, ipſæque $\delta\beta$, $\delta\beta$, ſeries item primanis reciproca. Conſtat ergo propoſitum per Prop. 103.

PROP. CVI. *Theorema.*

SI ſeries aliqua reciproca per ſeriem aliam (ſive reciprocam ſive directam) multiplicetur aut dividatur

tur, vel etiam aliam multiplicet aut dividat; eædem leges obſervandæ ſunt quæ in ſeriebus directis prop. 73 & 81.

Exſempli gratia. Si ſeries ſecundanis reciproca (puta $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, &c.) cujus index -2 reſpective multiplicetur in ſeriem Tertianis reciprocam (puta $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, &c.) cujus index eſt -3; prodibit ſeries ſubquintanis reciproca $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{243}$, &c.) cujus index $-5 = -2 - 3$ ut patet.

Item ſi ſeries tertianis reciproca ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, &c.) cujus index -3; reſpective multiplicetur per ſeriem ſecundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit ſeries $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{9}{27}$, &c. hoc eſt $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. Primanis reciproca, cujus index $-1 = -3 + 2$

Item ſi ſeries ſubſecundanis reciproca $\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \text{\&c.}\right)$ cujus index $-\frac{1}{2}$; reſpective multiplicetur in ſeriem ſecundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit ſeries $\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{3}}, \text{\&c. vel } \frac{1}{1}\sqrt{1}, \frac{4}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{3}\sqrt{3}, \text{\&c. vel } 1\sqrt{1}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}, \text{\&c. vel } \sqrt{1}, \sqrt{8}, \sqrt{27}, \text{\&c.}\right)$ radicum quadraticarum cuborũ ſeu tertianorum, cujus index $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 2$.

Item, ſi ſeries ſecundanis reciproca, cujus index -2, dividat ſeriem Primanis reciprocam, cujus index -1; prodibit ſeries Primanorum, cujus index $1 = -1 + 2$, nempe -1 minus -2.

$\frac{1}{1}$)	1	($\frac{1}{1} = 1$
$\frac{1}{4}$)	1	($\frac{4}{2} = 2$
$\frac{1}{9}$)	2	($\frac{9}{3} = 3$
	$\frac{1}{3}$	
	&c.	

Item ſi ſeries Primanis reciproca, cujus index -1, dividat ſeriem ſecundanis reciprocam, cujus index -2; prodibit ſeries Primanis reciproca, cujus index $-1 = -2 + 1$; nempe -2 minus -1.

$\frac{1}{1}$)	1	($\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$)	1	($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$)	4	($\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
	1	
	9	
	&c.	

Item, ſi ſeries primanis reciproca, cujus index -1, dividat ſeriem ſecundanorum, cujus index 2; prodibit ſeries tertianorum, cujus index $3 = 2 + 1$, nempe 2 minus -1.

$\frac{1}{1}$)	1	(1
$\frac{1}{2}$)	4	(8
$\frac{1}{3}$)	9	(27
	&c.	

Item

Item si seriem Primanis reciprocam, cujus index -1, dividat series secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianis reciproca, cujus index $-3 = -1 - 2$, nempe -1 minus 2.

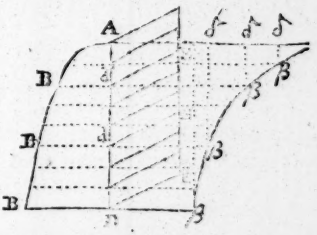
1)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1}$
4)	$\frac{1}{2}$	($\frac{1}{8}$
9)	$\frac{1}{3}$	($\frac{1}{27}$
	&c.	

Atque idem continget, in aliis quibusvis hujusmodi seriebus. Adeoque constat propositum.

PROP. CVII. *Corollarium.*

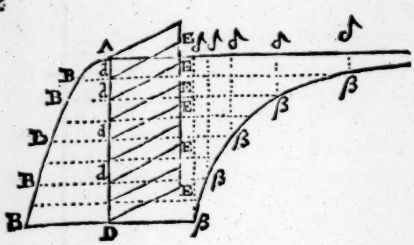
ET propterea; *Si ad hujusmodi figuram A D β δ, (ex una parte in infinitum productam) juxta quamcunq; seriem reciprocam, aptetur (eo modo quo 9 Prop. Con. Sect. & alibi supra ostendi;) Pyramidoides vel Conoides inversum, (seu potius Calatoides:) habebit illud ad cylindrum aut Prisma inscriptum (super eadem basi æquè-altum) eam rationem, sive finitam sive infinitam sive plusquam infinitam, quam præcedentia Theoremata docebunt.*

Puta, si planum sit rectarum series subtertianis reciproca, cujus index $-\frac{1}{3}$, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inscriptum (per Prop. 64, & 102) ut 1 ad $\frac{2}{3}$ ($= -\frac{1}{3} + 1$) hoc est, ut 3 ad 2: solidum ex totidem planis constans in rectarum earum ratione duplicata, erit series Quadratis subtertianorum reciproca, cujus index (per Prop. 106.) $-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, vel $-\frac{1}{3}$ plus $-\frac{1}{3}$, & ratio illius solidi ad inscriptum cylindrum vel Prisma (super eadem basi æque altum) ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1 utrobique ratio finita. per Prop 64 & 102.



Si planum, sit series subsecundanis reciproca, cujus index $-\frac{1}{2}$, adeoque ratio ipsius ad Parallelogrammum inscriptum

ut 1 ad $\frac{1}{2} = -\frac{1}{A} + 1$, vel ut 2 ad 1 : (per Prop. 101, 102,) ſolidum ex totidem planis in rectarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries quadratis ſubſecundanorum reciproca, vel (quod tantundem valet) ſeries Primanis reciproca, cujus index $-\frac{2}{2}$, vel $-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ Ideoque ratio hujus ſolidi ad cylindrum vel Priſma (ſuper eadem baſi æqualtum) ut 1 ad $-1 + 1 = 0$.



(per Prop. 103.) Nempe illic ratio finita, hic ſimpliciter infinita.

Si planum ſit ſeries Quadratis ſubtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{2}{3}$, ejuſque ratio ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1. (per Prop. 102.) ſolidum ex planis totidem in rectarum illarum duplicata ratione conſtans, erit ſeries Biquadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$, & propterea ratio ipſius ad inſcriptum cylindrum vel Priſma ſuper eadem baſi æque altum, ut 1 ad $-\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$, vel ut 3 ad -1 (per Prop. 104.) Nempe illic ratio finita, hîc pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries primanis reciproca, cujus index -1, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inſcriptum 1 ad $-1 + 1 = 0$: (per Prop 103) Solidum ex planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis Primanorum (hoc eſt, ſecundanis) reciproca, cujus index -2, & propterea ratio ipſius ad Cylindrum vel priſma ſuper eadem baſi æque altum, ut 1 ad $-2 + 1$, ſeu ut 1 ad -1. (per P. 104) Nempe illic ratio ſimpliciter infinita, hic pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries ſecundanis reciproca, cujus index -2, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $-2 + 1 = -1$. Solidum ex totidem planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis ſecundanorum, hoc eſt Quartanis, reciproca, cujus index $-4 = -2 - 2$; ejuſque ratio ad Cylindrum vel Priſma debite

bite inſcriptum, ut 1 ad $\square 4 + 1 = \square 3$. (per Prop. 104.) Nempe utrobiq; ratio pluſquam infinita.

SCHOLIUM.

Atque ita problema illud (ingenioſum quidem, & non paucis mirandum,) quod Torricellius in una figura ſolida præſtitit, (puta, *Solido Hyperbolico aucto* in infinitum continuato, æquale cylindrum conſtituere) nos in aliis innumeris figuris tam planis quam ſolidis (præcedentibus ſex propoſitionibus contenus) præſtitimus. Puta, *Figuris innumeris ſpecie differentibus, tam planis quam ſolidis, interminatis, æquales figuras terminatas* (vel ſaltem, quod tantundem valet, in cognita ratione conſtitutas) *exhibere.*

Conſultius fortaſſis eſſet, (ſi tantum aucupandæ famæ operam darem,) celata methodo qua huc perventum eſt, paucas aliquot particulares propoſitiones (tanquam admirandum quidpiam aut ſtupendum) demonſtrationibus apagogicis oſtendiſſe. quod veteres olim non raro feciſſe, plane ſuſpicor; qui illud ſæpius ſibi videntur propoſuiſſe, ut ipſos alii admirentur potius quam intelligant; ſaltem ut illis eorum effatis aſſenſum coacti præbeant, potius quam ut genuinam problematis inveſtigationem intelligant. Atque hinc factum eſſe credo, quod eorum Analytice (quam quidem ipſos habuiſſe ex multis ipſius, in demõſtrationibus eorum non paucis, veſtigiis ſatis liquet) poſteros fere penitus latuerit; (exigua enim plane pars illa eſt quæ apud Diophantum exſtat, ſi ad egregia illa quo ipſi pervenerunt inventa comparetur:) Ut neceſſe habuerint præſentis ævi mathematici (*Vieta, Oughtredus, Harriotus, Ghetaldus, Cavallerius, Torricellius, Charteſius*, aliique magni viri) vel novam excogitare, vel antiquam ſaltem (conclamatam plane & penitus ignoratam) de novo reſuſcitare; quod quidem eo ſucceſſu præſtiterunt, ut noſtram nunc dierum Analyticen, veterum iſtam, tanta ſuperſtitione celatam, æquare ſaltem vel ſuperare potius nulli dubitem.

Verum ergo mallem libere philoſophando, fontes ipſos aperire, ut eadem opera poſſit lector & propoſitionum demonſtrationes & methodum qua iſtuc pervenerim perſentiſcere; unde & ipſe poſſit proprio marte ejuſmodi alias innumeras inveſtigare, quas ego (ne tædio ſim) lubens prætereo, contentus eo digitum intendiſſe, unde alii alia noſtris ſimilia pro libitu depromant.

Licuiſſet quidem & præmiſſis multa ſubjungere, & multa paſſim interpolare, quæ ex principiis jam traditis facile deduci poſſent. Verum cum ea, quæ jam tradidi, mihi videantur abunde ſufficere, ut & ipſa perſpicue ſatis intelligantur, & perfectam ſatis *ſeriorum* (tam ſimplicium quam compoſitarum & utriſque Reciprocarum) tractationem videantur continere: ad ſeries *Conjunctas* (ſive ad Binomiorum ſive Apotomarum formam) explicandas, feſtinandum ſentio.

PROP. CVIII. *Theorema.*

SI ſeries Æqualium ſerie Primanorum reſpective mulctetur (puta, ſi primus terminus hujus a primo illius auferatur, ſecundus a ſecundo, &c.) Reſidua erunt ſemiſſis totius: ſin ita augeatur; Aggregatorum ſeries erit expoſitæ ſeriei Æqualium ſeſquialtera.

Intellige, ſi Æqualium & Primanorum terminus ultimus idem ſit (vel æqualis) Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit: ſin fuerint inæquales, non tamen erit difficile rationes provenientes invenire; quod monuiſſe ſufficiat, cum id quilibet ſuo marte præſtare poterit.

Sit verbi gratia terminus Æqualium quilibet & primanorum maximus R; ejuſque pars infinite parva dicatur $a = \frac{R}{\infty}$; numerus terminorum omnium (vel figuræ altitudo A:) ſi Termini

R − 0 *a*	R + 0 *a*
R − 1 *a*	R + 1 *a*
R − 2 *a*	R + 2 *a*
R − 3 *a*	R + 3 *a*
&c.	&c.

continuentur in infinitum uſque ad .... R − R R + R

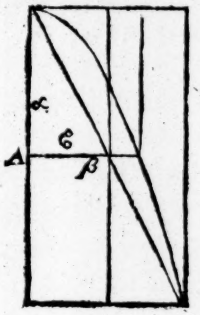
erit Reſiduorũ & Aggregatorũ ſũma ... AR − ½AR AR + ½AR

Nam omniũ Æqualium agregatũ erit AR (ut patet;) Primanorum aggregatum ejuſdem ſemiſſis ½ AR, per Prop. 2.) Ergo AR − ½AR = ½AR, & AR + ½AR = 1½AR. Nempe ſeriei Æqualium (AR) illud eſt ½, hoc 1½: prout affirmatur. Hoc eſt, erit illud ad ſeriem æqualium ut ½ ad 1, vel ut 1 ad 2: hoc autem, ut ½ ad 1, vel ut 1 ad 3, vel 3 ad 6.

PROP.

PROP. CIX. *Corell.*

ERgo, *si Parallelogrammò auferatur Triangulum (ſuper eâdem vel æquali baſe æquè-altum) Reſiduum (quod quidem & ipſum erit Triangulum inverſum) erit Parallelogrammi ſemiſſis: ſin addatur Triangulum, erit aggregatum (nempe Trapezium) ſeſquialterum.*



Patet ex præcedenti; eſt enim Parallelogrammum ſeries Æqualium; Triangulum, ſeries Primanorum.

PROP. CX. *Corell.*

ITem, *Cylindrus Parabolicè excavatus, eſt pleni ſemiſſis. (Quod idem verum eſt de Priſmate analogice excavato.)*

Nempe ſi ex Cylindro (ſerie nempe Æqualium (eximatur conoides Parabolicum (ſuper eadem baſe æque-altum) quod quidem eſt ſeries primanorum (per Prop. 4, vel 60.) quod reliquum eſt erit ſemiſſis totius per Prop. 108.

Atque idem accidet ſi Priſmati eximatur Pyramidoides Parabolicum.

PROP. CXI. *Theorema.*

SI Series Æqualium multetur ſerie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Reſidua erunt totius duo Trientes, tres Quadrantes, quatuor Quintantes, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata

gregata ejuſdem Seſquitertium, Seſquiquartum, Seſquiquintum, &c.

Nempe ſi Termini $\left\{\begin{array}{llll} R^2 \pm 0a^2 & R^3 \pm 0a^3 & R^4 \pm 0a^4 \\ R^2 \pm 1a^2 & R^3 \pm 1a^3 & R^4 \pm 1a^4 \\ R^2 \pm 4a^2 & R^3 \pm 8a^3 & R^4 \pm 16a^4 \\ R^2 \pm 9a^2 & R^3 \pm 27a^3 & R^4 \pm 81a^4 \end{array}\right.$

&c &c. &c.

continuentur uſq; ad $R^2 \pm R^2$ $R^3 \pm R^3$ $R^4 \pm R^4$

erunt ſummæ $AR^2 \pm \frac{1}{3}AR^2 . AR^3 \pm \frac{1}{4}AR^3 . AR^4 \pm \frac{1}{5}AR^4$

(per Prop. 44)

Hoc eſt, Reſiduorũ ſumma $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ &c.

Aggregatorum ſumma $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ &c.

PROP. CXII. *Coroll.*

ERgo, *ſi Parallelogrammo auferatur complementum Semi-paraboloæ, Semi-paraboloidis cubicalis, Biquadraticalis, &c. Reſiduum (puta ſemi-paraboloa, ſemi-paraboloides cubicale, biquadraticale, &c.) erit* $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, *&c. totius Parallelogrammi: ſin eidem Parallelogrammo ejuſmodi complementum addatur, erit aggregatum* $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$, *&c. Ejuſdem Parallelogrammi.*

Patet ex præcedente.

PROP. CXIII. *Coroll.*

ITem, *Cylindrus Conicè excavatus, (vel Priſma Pyramidicè,) continet integri duos trientes. Et ſimiliter de aliis excavationibus (mutatis mutandis) fiet judicium.*

Patet ex Prop. 111. ſubducta quippe ſerie ſecundanorum, ex ſerie Æqualium.

PROP.

PROP. CXIV. *Theorema.*

SI Series Æqualium multetur serie subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. Residua erunt totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem quinq; Trientes, septem Quadrantes, novem Quintantes, &c. vel, duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.

Nēpe si termini.	$\sqrt{R} \pm \sqrt{0a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{0a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{0a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{1a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{1a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{1a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{2a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{2a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{2a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{3a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{3a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{3a}$
	&c.	&c.	&c.
Continuentur ad	$\sqrt{R} \pm \sqrt{R}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{R}$
Erũt summæ (per prop. 54.)	$A\sqrt{R} \pm \frac{1}{1} A\sqrt{R}$.	$A\sqrt[3]{R} \pm \frac{3}{4} A\sqrt[3]{R}$.	$A\sqrt[4]{R} \pm \frac{4}{5} A\sqrt[4]{R}$
Hoc est, Residuorum summa	$1 - \frac{1}{1} = \frac{0}{1}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Aggregatorum summa	$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$	$3 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$	$2 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

PROP. CXV. *Corollarium.*

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, &c. Residuum erit totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin addatur, erit Aggregatum Parallelogrammi duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.*

Sequitur ex præced.

PROP.

PROP. CXVI. *Theorema.*

PAri modo judicandum erit in seriebus aliis seriei Æqualium addendis vel subducendis; quarum quantitas innotescit ex prop. 59. vel 64.

Puta si termini	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{0a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{0a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{0a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{1a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{1a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{1a^4}$.
	$\sqrt{R^3} + \sqrt{8a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{4a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} + \sqrt[3]{16a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{27^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{9a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{81a^4}$.
	&c. ad	&c. ad	&c. ad
continuantur ad	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{R^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{R^4}$.
summa	$A\sqrt{R^3} \pm \frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$	$A\sqrt[3]{R^2} \pm \frac{3}{5}A\sqrt[3]{R^2}$	$A\sqrt[3]{R^4} \pm \frac{4}{7}A\sqrt[3]{R^4}$
Hoc est, Residua	$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$	$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$
Aggregata	$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$

Et similiter (mutatis mutandis) in aliis quibuscunq;.

PROP. CXVII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Placet autem pro notis $1a$, $2a$, $3a$, &c. (in præcedentibus propositionibus usurpatis) jam substituere a, b, c, &c. quo melius operationis processus perspiciatur.

PROP.

Seriei	Quadrata.	Cubi
$R - o$	$R^2 - oR + oo$	$R^3 - oR^2 + oR - ooo$
$R - a$	$R^2 - 2aR + a^2$	$R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3$
$R - b$	$R^2 - 2bR + b^2$	$R^3 - 3bR^2 + 3b^2R - b^3$
$R - c$	$R^2 - 2cR + c^2$	$R^3 - 3cR^2 + 3c^2R - c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. ad
$R - R$	$R^2 - 2RR + R^2$	$R^3 - 3RR^2 + 3R^2R - R^3$
$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR^2 - \frac{2}{2}AR^2 + \frac{1}{2}AR^2$	$AR^3 - \frac{3}{2}AR^3 + \frac{3}{3}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$
nēpe $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
vel $\frac{1}{2}$	$\frac{1 \times 2}{2 \times 3}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Et ſic deinceps, continuè multiplicando numeros arithmeticè proportionales, (prout poteſtatis gradus poſtulat) ab 1 & 2, unitate continuè creſcentes.

Et quidem nihil aliud ſunt quam totidem ſeries Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. inverſæ.

PROP. CXVIII. *Theorema.*

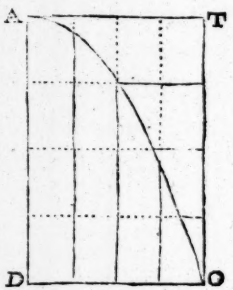
SI ſupponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie ſecundanorum: Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata	Cubi
$R^2 - oo$	$R^4 - ooR^2 + oo$	$R^6 - ooR^4 + ooR^2 - oo$
$R^2 - a^2$	$R^4 - 2a^2R^2 + a^4$	$R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6$
$R^2 - b^2$	$R^4 - 2b^2R^2 + b^4$	$R^6 - 3b^2R^4 + 3b^4R^2 - b^6$
$R^2 - c^2$	$R^4 - 2c^2R^2 + c4$	$R^6 - 3c^2R^4 + 3c^4R^2 - c^6$
&c. ad	&c. uſq; ad	&c. uſq; ad
$R^2 - R^2$	$R^4 - 2R^2R^2 + R^4$	$R^6 - 3R^2R^4 + 3R^4R^2 - R^6$
ſūma $AR^2 - \frac{1}{3}AR^2$	$AR^4 - \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$AR^6 - \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 - \frac{1}{7}AR^6$
nēpe $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$	$1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{48}{105}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$

Et ſic deinceps, continue multiplicando numeros arithmeticè proportionales (quouſque gradus poteſtatis poſtulat) a 2 & 3 continue binario creſcentes.)

PROP. CXIX. *Corollarium.*

ET propterea, *Conoides (vel Pyramidoides) ſemiparabole (aut etiam Parabole) circa ipſius ordinatim-applicatam aptatum, erit ad Cylindrum (vel Priſma) ejuſdem baſis & altitudinis, ut* 8 *ad* 15.



Nempe ut Quadrata reſiduorum ſeriei Æqualium mulctatæ ſerie ſecundanorum, (ad totidem maximo æqualium) Nam ſi volvendo ſemiparabolam A D O circa ipſius ordinatim-applicatam D O, ut axem (vel etiam alias, ut Prop. 9 Con. Sect. diximus,) formetur conoides (vel Pyramidoides) cujus vertex O: erunt plana illa Conoides (vel Pyramidoides) conſtituentia ut Quadrata ſeriei Æqualium ſerie ſecundanorum mulctatæ: (Nam rectæ in ſemiparabola A D O Diametro A D parallelæ, ſunt reſiduæ Æqualium ablatis ſecundanis, in complemento A T O repertis, ut patet ex dictis Prop. 23.) Ideoq; ad totidem maximo æqualia (hoc eſt, Cylindrum vel Priſma,) ut 8 ad 15 per præcedentem.

SCHOLIUM.

Et pari modo de conoidibus vel Pyramidoidibus ad Paraboloidis cujuſvis ordinatim applicatam aptatis, judicium fiet, ope ſequentium propoſitionum. Puta in Paraboloide cubicali ratio erit ut 9 ad 14; in Biquadraticali, ut 32 ad 45; in ſurdeſolidali, ut 25 ad 33, &c. ut in tab. Prop. 126.

PROP.

PROP. CXX. *Corollarium.*

DEinde, *Si infinita ſeries Æqualium multiplicata ſerie Primanorum, in eandem ſeriem Æqualium eâdem ſerie Primanorum auctam, reſpectivè ducatur: Rectangulorum (vel Quadratorum aut etiam ſimilium quarumvis figurarum, ipſis æqualium, aut quidem proportionalium) Aggregatum, ad aggregatum totidem maximo Æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet, ſi Quadrata ſeriei multiplicata ducantur in Quadrata ſeriei auctæ; & Cubi illius in Cubos hujus; & ſic deinceps.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. 118. Nam

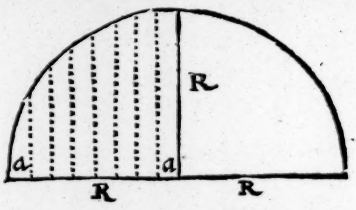
$$\begin{array}{rll} & R-a & Q:R-a:=R^2-2aR+a^2 \\ \text{in} & R+a & Q:R+a:=R^2-2aR+a^2 \\ \hline \text{facit} & R^2-a^2 & R^4-2a^2R^2+a^4 \\ & \&c. & \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & C:R-a:=R^3-3aR^2+3a^2R-a^3 \\ \text{in} & C:R+a:=R^3+3aR^2+3a^2R+a^3 \\ \hline \text{facit} & R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6 & \\ & \&c. & \end{array}$$

& ſic in ſingulis terminis cujuſvis poteſtatis; ut multiplicando patebit Prop. 121.

PROP. CXXI. *Corollarium.*

IDeoq;, *Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipſis quælibet ad Parallelogrammum ſibi circumſcriptum,) eam habet rationem, quam habent Radices quadraticæ univerſales Reſiduorum ſeriei infinitæ Æqualium ſerie Secundanorum multiplicatæ, ad ſeriem illam Æqualium.*



Nam si circuli Radius ponatur R, (cujus Pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$,) eique insistant Perpendiculares sive sinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illæ perpendiculares mediæ proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est;) hoc est,

inter	$R+0$,	$R+1a$,	$R+2a$,	$R+3a$,	&c.
&	$R-0$,	$R-1a$,	$R-2a$,	$R-3a$,	&c.
quorũ Rectangula,	R^2-00,	R^2-1a^2,	R^2-4a^2,	R^2-9a^2	&c.
Ipsæq; mediæ proportionales	$\sqrt{:R^2-00}$.	$\sqrt{:R^2-1a^2}$.	$\sqrt{:R^2-4a^2}$,	$\sqrt{:R^2-9a^2}$,	&c.

Quam igitur rationem habent harum radicum universalium Aggregatum, ad totidem maximæ (Radio scil.) æqualium, eam habet quadrans circuli (ex illis constans) ad quadratum Radii (constans ex his.) Adeoque & circulus integer ad quadratum Diametri. Quod erat ostendendum.

Atque idem de qualibet ellipsi (mutatis mutandis) facile ostendetur; cum ipsius etiam ordinatim applicatæ sint mediis proportionalibus (inter diametri transversæ segmenta) proportionales, & quidem nonnunquam æquales, ut ex conicorum doctrina notum est.

SCHOLIUM.

Ratio autem quam innuit hæc propositio (circuli nempe ad quadratum Diametri) ea est, quam habet Unitas ad numerum intermedium inter 1 & $\frac{3}{2}$ in secunda serie Transversa Tabellæ Prop 127. Quomodo autem invenietur numerus ille (vel alius quivis istius seriei numeris interponendus) deinceps inquirendum erit.

PROP.

PROP. CXXII. *Corollarium.*

ET proinde, *ſi ſupponamus infinitas rectas ſemiparabolæ cujuſvis, in ejuſdem continuationis æquèalta & ſitu inverſo poſitæ rectas, reſpectivè ductis quod provenit ſolidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (aut ex Quadratis quæ rectangulis illis ſint æqualia) erit ad Parallelepipedum ſuper eadem baſe æquè-altum, ut circulus ad Quadratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in ſubduplicatâ ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel Ellipſi.)*

Semiparabolam quamlibet AP O, ſecet recta MO (baſi parallela) in duo ſegmenta æque alta; & Recta MO dicatur √ R. Erunt reliquæ ordinatim-applicatæ in ſegmento ſuperioria ſcendendo, √:R — a. √:R — 2a. √:R — 3a. &c. Et in ſegmento inferiori deſcendendo, √:R + a. √:R + 2a. √:R + 3a. &c. (propter quadrata ordinatim applicatarū in parabola, arithmetice proportionalia.) Ideoq; ſi ſupponamus ſemiparabolā ita ſectam ſic in ſe replicari, ut punctum P puncto A congruat, totumq; ſegmentum M P O transferatur in ſitum M A ω, (ut ordinatim-applicatæ inferioris ſegmenti ordinatim applicatis ſuperioris inverſe reſpondeant) rectangula, O D o, O D o, &c. Erunt √:R². — o. √:R² — a². √:R² — 4a² √:R² — 9a², &c. ut multiplicatione patebit.

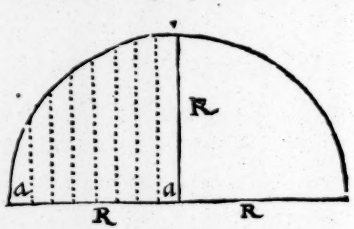
√:R — o.	√:R — a.	√:R — 2a.	√:R — 3a.
√:R + o.	√:R + a.	√:R + 2a.	√:R + 3a.
√:R² — o	√:R² — a²	√:R² — 4a	√:R² — 9a² &c.

Horum igitur omnium aggregatum, ad maximum ($\sqrt{:R^2 - 0:} = \sqrt{R^2} = R$) toties positum, hoc est, solidum propositum ad Parallelepidum ejusdem basis & altitudinis,) ut circulus ad quadratum Diametri per præced. Et propterea etiam mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim applicatarum in circulo vel ellipsi, ut patet.

PROP. CXXIII. *Corollarium.*

ITem, *Sphæræ (vel Sphæroides aut etiam Pyramidoides Ellipticum,) ad cylindrum (vel Prisma) circumscriptum; est ut series infinita Æqualium mulctata serie secundanorum, ad seriem totidem maximo Æqualium. Hoc est ut 2 ad 3.*

Sequitur ex Prop. 121. Nam si mediæ proportionales inter diametri segmenta, quadrantem circuli (vel ellipseos) complentes, jam fieri supponantur totidem aliorum circulorum invicem parallelorum radii, semissem sphæræ (vel sphæroideos) complentium, (vel similium quorumvis planorum rectæ similiter positæ semipyramidoides ellipticum constituentium;) erunt hi circuli (vel plana) in duplicata ratione Radiorum suorum (sive rectarum similiter positarum:) Hoc est, ut $R^2 - 0$. $R^2 - a^2$. $R^2 - 4a^2$ $R^2 - 9a^2$, &c. (sunt enim rectæ illæ $\sqrt{:R^2 - 0}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$, $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$ &c. per Prop. 121.) Ideoq; horum omnium aggregatum, ad aggregatum omnium maximo æqualium ut 2 ad 3. per Prop. 118.

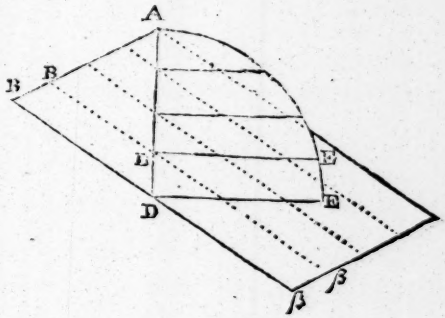


PROP.

PROP. CXXIV. *Corollarium.*

ITem, *ſi Trianguli A D B rectæ reſpective ducantur in rectas Trapezii A D B (æque-alti, atque cum ipſo Triangulo Parallelogrammum complentis ;) quæ prodeunt rectangula erunt æqualia totidem ſimilibus planis Conoideos (vel Pyramidoideos) elliptici: Et mediæ proportionales D E, D E, &c. Erunt ordinatim applicatæ in (Circulo, vel ſaltem) Ellipſi.*

Demonſtratio facile patet ex dictis ad Prop. 121. Et 123. Nam ſegmenta rectæ B β in hac figura tantundem valent atque ſegmenta Diametri in illa figura.



Si autem tam rectæ A D, D B, ſint æquales, quam rectæ A D, D E, ad invicem perpendiculares, erunt ipſæ D E, D E, ordinatim applicatæ in circulo; ſint minus, ſaltem in ellipſi. Portio autem ſive circuli ſive Ellipſeos A E, major eſt aut minor quam Quadrans, prout D B major eſt aut minor quam D β.

PROP. CXXV. *Corollarium.*

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Tertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium

æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nempe,

Seriei	Quadrata	Cubi.
$R^1 - 000$	$R^6 - 00R^3 + 00$	$R^9 - 00R^6 + 00R^3 - 00$
$R^2 - a^3$	$R^6 - 2a^3R^3 + a^6$	$R^9 - 3a^3R^6 + 3a^6R^3 - a^9$
$R^3 - b^3$	$R^6 - 2b^3R^3 + b^6$	$R^9 - 3b^3R^6 + 3b^6R^3 - b^9$
$R^4 - c^3$	$R^6 - 2c^3R^3 + c^6$	$R^9 - 3c^3R^6 + 3c^6R^3 - c^9$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R^3 - R^3$	$R^6 - 2R^3R^3 + R^6$	$R^9 - 3R^3R^6 + 3R^6R^3 - R^9$
sūma $AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$	$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$	$AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9$
nēpe $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{15}{28}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{162}{280}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$	$\frac{2 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$

& sic deinceps, continue mutiplicando numeros arithmetice proportionales (quousque cujuslibet poteſtatis gradus poſtulat) a 3 & 4, ternario continue creſcentes.

PROP. CXXVI. *Corell.*

Pari modo, ſi exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.	$1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}$.	$1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{384}{585}$	$1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} = \frac{6144}{9945}$.
vel	$\frac{4}{5}$	$\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$	$\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$	$\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$
Itē	$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.	$1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{50}{66}$.	$1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{750}{1056}$,	$1 - \frac{4}{6} + \frac{6}{11} - \frac{4}{16} + \frac{1}{21} = \frac{15000}{22176}$
vel	$\frac{5}{6}$	$\frac{5 \times 10}{6 \times 11}$	$\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$	$\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21}$

Et ſic in aliis quibuſlibet; nempe continue multiplicando numeros arithmetice proportionales (quouſque gradus poſtulat) a 4 & 5, vel 5 & 6, vel 6 & 7, &c. quaternario, vel Quinario

nario, vel ſenario, &c. (ſecundum indicem ſeriei ſubductæ) continuè creſcentes. Prout inductiõne patebit. Ad hunc modum.

Seriei Æqualium mulctatæ ſerie

Ratio quam habet ad ſeriem maximo æqualium.

		Reſidua. Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdeſolida.
Primanorũ	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$.	$\frac{2}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{24}$.	$\frac{6}{24} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{120}$.	$\frac{24}{120} \times \frac{5}{6} = \frac{120}{720}$.
Secũdanor.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.	$\frac{8}{15} \times \frac{6}{7} = \frac{48}{105}$.	$\frac{48}{105} \times \frac{8}{9} = \frac{384}{945}$.	$\frac{384}{945} \times \frac{10}{11} = \frac{1840}{10395}$.
Tertianorũ	$\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{18}{28}$.	$\frac{18}{28} \times \frac{10}{9} = \frac{162}{280}$.	$\frac{162}{280} \times \frac{12}{13} = \frac{1944}{3640}$.	$\frac{1944}{3640} \times \frac{12}{16} = \frac{29160}{58240}$.
Quartanor.	$\frac{4}{5}$.	$\frac{4}{5} \times \frac{8}{9} = \frac{32}{45}$.	$\frac{32}{45} \times \frac{12}{13} = \frac{384}{585}$.	$\frac{384}{585} \times \frac{16}{17} = \frac{6144}{9945}$.	$\frac{6144}{9945} \times \frac{20}{21} = \frac{122880}{208845}$.
Quintan.	$\frac{5}{6}$.	$\frac{5}{6} \times \frac{10}{11} = \frac{50}{66}$.	$\frac{50}{66} \times \frac{14}{16} = \frac{700}{1056}$.	$\frac{700}{1056} \times \frac{20}{21} = \frac{14000}{22176}$.	$\frac{14000}{22176} \times \frac{24}{26} = \frac{336000}{576576}$.

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

Nempe, si index seriei ablatæ ponatur a; rationem habebunt, ad seriem maximo Æqualium, ipsa

Residua. Quadrata. Cubi. &c.

quam habent $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{a}{a+1} \times \frac{2a}{2a+1} \cdot \frac{a}{a+1} \times \frac{2a}{2a+1} \times \frac{3a}{3a+1}$ &c. } ad unitatem. vel

vel $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{2a^2}{2a^2+3a+1} \cdot \frac{6a^3}{6a^3+11a^2+6a+1}$, &c. }

quã habet unitas ad $\frac{a+1}{a} \cdot \frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \cdot \frac{a+1}{a} \times \frac{2a\times1}{a} \times \frac{3a+1}{2a}$ &c.

vel $\frac{a+1}{a} \cdot \frac{2a^2+3a+1}{2a^2} \cdot \frac{6a^3+11a^2+6a+1}{6a^3}$ &c.

Atq; hoc idem valebit si ablata series sit series Radicum.

Verbi gratia. Si a serie Æqualium auferatur series Subsecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam si ponatur $a=\frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a}=3$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}=3\times2=6$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{a}\times\frac{3a+1}{3a}=3\times2\times1\frac{2}{3}=10$. &c. Sunt autem, in ejusmodi ablationibus, Residua, quadrata, Cubi, &c. ad seriem maximo æqualium; ut 1 ad 3. 6. 10. &c.

Similiter, si auferatur series Subquartanorum, cujus index $\frac{1}{4}$; & ponatur $a=\frac{1}{4}$. Erit $\frac{a+1}{a}=5$. $\frac{2a+1}{2a}=3$. $\frac{3a+1}{3a}=2\frac{1}{3}$. $\frac{4a+1}{4a}=2$. &c. $5\times3=15$. $15\times2\frac{1}{3}=35$. $35\times2=70$. &c. Sunt autem, in ejusmodi Sublationibus, Residua, quadrata, cubi, biquadrata, &c. ut 1 ad 5, 15, 35, 70 &c. Et pariter in ejusmodi aliis, ut deinceps etiam ulterius patebit.

Interim placet propositiones aliquot præcedentes in Tabellam conjicere, propositioni sequenti subjungendam. Nempe.--

PROP. CXXVII. *Theorema.*

SI exponatur (infinita) series Æqualium multata serie (analoga) Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Residua ipsa, eorumq; Quadrata

Quadrata, Cubi, &c. Eam rationem habebunt ad expoſitam ſeriem Æqualium; quam habet Unitas ad numeros in ſubjecta Tabella indicatos. Nempe ---

Seriei Æqualium mulctatæ ſerie

	Reſid.	Q.	Cubi	Biq.	Surdeſ.	Sextana.
Primanorum	2/1	6/2	24/6	120/24	720/120	5040/720
Secundanor.	3/2	15/8	105/48	945/384	10395/3840	135135/46080
Tertianorũ	4/3	28/18	280/162	3640/1944	58240/24160	1106560/524880
Quartanorũ	5/4	45/32	585/384	9945/6144	208845/192880	5221125/2949120
Quintanorũ	6/5	66/50	1056/750	22176/15000	576576/375000	17873856/12500000
Sextanorum	7/6	91/72	1729/1296	43225/31104	1339975/933120	49579075/33592320

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

Sequitur ex præced.

SCHOLIUM.

Verum quo pacto inveſtigabitur, quam habeant rationem ſerierum illarum Apotomarum Radices quadraticæ, Cubicæ, &c. ad ſeriem totidem earum maximæ æqualium: Hic labor hoc opus eſt. Nihil enim aliud deeſt ad Circuli & Elipſeos quadraturam. Ut ex Prop 121. jam patet, & ex propoſitionibus aliquot ſecuturis ulterius patebit.

PROP. CXXVIII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Subſecundanorum: Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R} - \sqrt{a}$	$R - 2\sqrt{aR} + a$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{a} + 3a\sqrt{R} - a\sqrt{a}$
$\sqrt{R} - \sqrt{b}$	$R - 2\sqrt{bR} + b$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{b} + 3b\sqrt{R} - b\sqrt{b}$
$\sqrt{R} - \sqrt{c}$	$R - 2\sqrt{cR} + c$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{c} + 3c\sqrt{R} - c\sqrt{c}$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{R} - \sqrt{R}$	$R - 2\sqrt{RR} + R$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{R} + 3R\sqrt{R} - R\sqrt{R}$
$A\sqrt{R} - \frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$AR - \frac{4}{3}\sqrt{AR} + \frac{1}{2}AR$	$AR\sqrt{R} - \frac{6}{3}AR\sqrt{R} + \frac{3}{2}AR\sqrt{R} - \frac{2}{5}AR\sqrt{R}$
$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$1 - \frac{6}{3} + \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$
$\frac{1}{1 \times 2}$	$\frac{1}{1 \times 2 \times 3}$	$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 + 4}$

Et sic deinceps; nempe eam rationem quam habet 1 ad numeros triangulares, sive aggregatum numerorum arithmetice proportionalium (quousque gradus potestatis postulat) ab 1 continue unitate crescentium.

PROP. CXXIX. *Corollarium.*

ET Propterea, *Conoides (vel Pyramidoides) Complemento Semiparabolæ circa ipsius Ordinatim-applicatam aptatum, est ad Cylindrum (vel prisma) ejusdem basis & altitudinis, ut* 1 *ad* 6.

Nempe ut quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie subsecundanorum, ad totidem maximo æqualium. Cum enim in semiparabolæ complemento AOT, rectæ ipsius diametro AT parallelæ, sint residua Æqualium demptis subsecundanis nempe (ordinatim-applicatis in semi-parabola AOD;) si volvendo complementum illud AOT circa ipsam OT ut axem (vel etiam alias, ut alibi dictum est,) formetur conoides, (aut etiam Pyramidoides analogum) cujus vertex O; circuli sic volvendo descripti (vel similia plana similiter posita) erunt in rectarum illarum (ipsi AT parallelarum) ratione duplicata. Hoc est, ut quadrata Residuorum seriei Æqualium sublatis secundanis; ideoque ut 1 ad 6 per præced.

In Fig. Prop. 119.

SCHO-

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit de Conoidibus & Pyramidoidibus complementi ſemiparaboloidis cujuſvis circa ipſius ordinatim-applicatam aptatis, juxta propoſitiones ſequentes: Nempe mutatis mutandis, prout ſemiparaboloidis gradus poſtulaverit. Puta in ſemiparaboloide cubicali, ut 1 ad 10; in Biquadraticali, ut 1 ad 15; in Surdeſolidali, 1 ad 21. &c. juxta tabellam Prop. 131.

PROP. CXXX. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie ſubtertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{a}R + \sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{a}R^2 + 3\sqrt[3]{a^2}R - \sqrt[3]{a^3}$
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{b}R + \sqrt[3]{b^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{b}R^2 + 3\sqrt[3]{b^2}R - \sqrt[3]{b^3}$
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{c}R + \sqrt[3]{c^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{c}R^2 + 3\sqrt[3]{c^2}R - \sqrt[3]{c^3}$
&c. ad	&c. ad	&c. uſque ad
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{R}R + \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R}R^2 + 3\sqrt[3]{R^2}R - \sqrt[3]{R^3}$
$A\sqrt[3]{R} - \frac{3}{4} = A\sqrt[3]{R}$	$A\sqrt[3]{R^2} - \frac{6}{4}A\sqrt[3]{R^2} + \frac{3}{5}A\sqrt[3]{R^2}$	$AR - \frac{9}{4}AR + \frac{9}{5}AR - \frac{1}{8}AR$
$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$	$1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{5} - \frac{1}{8} = \frac{1}{20}$
1		1
$1 + 3 = 4$	$4 + 6 = 10$	$10 + 10 = 20$

Et ſic deinceps; continue addendo numeros triangulares ſeu aggregata numerorum arithmetice proportionalium, ut habeatur conſequens rationis cujus antecedens eſt 1.

PROP. CXXXI. *Theorema.*

PAri modo, Si exponatur series Æqualium multata serie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. Resiliuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nam ut in subductione seriei subsecundanorum, consequentes rationum fiunt continua additione numerorum arithmetice proportionalium, $1+2=3$. $1+2+3=3+3=6$. $1+2+3+4=6+4=10$. $1+2+3+4+5=10+5=15$. $1+2+3+4+5+6=15+6=21$. &c Ita in subductione subtertianorum consequentes rationum fiunt continua additione numerorum illorum (3, 6, 10, 15, 21, &c) in subductione subsecundanorum modo inventorum; nempe $1+3=4$. $4+6=10$. $10+10=20$. $20+15=35$. $35+21=56$. &c. vel $1+1+2=1+3=4$. $4+1+2+3=1+3+6=10$. $10+1+2+3+4=1+3+6+10=20$. $20+1+2+3+4+5=1+3+6+10+15=35$. $35+1+2+3+4+5+6=1+3+6+10+15+21=56$. &c. Deinde ex numerorum jam inventorũ (4, 10, 20, 35, 56, &c.) continua additione, fiunt consequentes rationũ in subductione seriei subquartanorũ, (nempe $1+4=5$. $5+10=15$. $15+20=35$. $35+56=91$. &c.) Et ex horum iterum continua additione, fiunt consequentes rationum in subductione seriei proximæ (subquintanorum;) Et sic deinceps ad hunc modum.

Ratio

Ratio quam habent ad seriem maximo Æqualium

Serici Æqualium multiplicis seriei	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdesolida	Sextana.
Primanor.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}$.
Subsecun.	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+5}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+6}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+7}=\frac{1}{28}$.
Subtertia.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+6}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{20+15}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+21}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+28}=\frac{1}{84}$.
Subquart.	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+10}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+20}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+35}=\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{70+56}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+84}=\frac{1}{210}$.
Subquint.	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+15}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+35}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+70}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+126}=\frac{1}{252}$.	$\frac{1}{252+210}=\frac{1}{462}$.
Subsext.	$\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.	$\frac{1}{7+21}=\frac{1}{28}$.	$\frac{1}{28+56}=\frac{1}{84}$.	$\frac{1}{84+126}=\frac{1}{210}$.	$\frac{1}{210+252}=\frac{1}{462}$.	$\frac{1}{462+462}=\frac{1}{924}$.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHOLIUM.

Atque hic obiter incidimus in numerorum figuratorum (ut dici ſolent) ſpeculationem inſperatam. Sunt enim numeri omnes (tam hujus quam ſequentis Tabellæ) hujuſmodi additione facti, figurati; putà Laterales, Triangulares, Pyramidales, &c. Quod, cum ſit cuivis obvium, monuiſſe ſufficiat.

Patet etiam, (in utraque Tabella,) ſeries numerorum ſic inventorum tranſverſas eaſdem plane eſſe atque erectas.

Ex dictis autem licet propoſitionum aliquot præcedentium ſummam (nempe de ſerie Æqualium ſerie radicum mulctata) in unam Tabellam conjicere quam ſequenti propoſitioni ſubjungam. Nempe ----

PROP. CXXXII. *Theorema.*

SI exponatur infinita ſeries Æqualium mulctata analoga ſerie Primanorum (vel ſi libet, ſubprimanorum, quod tantundem valet) Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. Reſidua ipſa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. eam rationem habebunt ad congruam ſeriem Æqualium, quam habet Unitas ad numeros in ſubjecta Tabella indicatos. Nempe

Seriei

Seriei Æqualium mulctatæ serie

Nulla	Subprimanorum	Subsecundanorū	Subtertianorum	Subquartanorum	Subquintanorum	Subsextanorum	Subseptimanorū	Suboctavanorum	Subnonanorum	Subdecimanorum	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Æqualia
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Residua.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Quadrata.
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	Cubi.
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	Biquadrat.
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	Surdesol.
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	Sextana.
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	Septimana
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	Octavana.
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	Nonana.
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	Decimana.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur ex præcedente. Numerus autem Tabellæ quilibet intermedius est aggregatus ex duobus sibi proximis altero sursum altero ad dextram positis.

Notandū etiam est, eundem prodire rationis consequentem in residuorū quadratis si auferantur subtertiana, & in Cubis si auferantur subsecundana; item in sextanis siau ferantur subseptimana, & in septimanis si auferantur subsextana; & sic ubique reciprocatis quasi potestatibus, ut ex inspecta tabella patet.

Sed & etiam alias idem aliquando accidit, puta in Surdesolidis si auferantur subprimana & in ipsis Residuis si auferantur subquintana, sed & in Quadratis si auferantur subsecundana; Item in Nonanis si auferantur subprimana, & in ipsis Residuis si auferantur subnonana, sed & in Cubis si auferantur subsecundana, & Quadratis si auferantur subtertiana: Item in Octavanis si auferantur subsextana, & sextanis si auferantur suboctavana, sed & in Decimanis si auferantur subquintana, & in Quintanis si auferantur subdecimana: & sic alibi ut ex tabella patet.

PROP. CXXXIII. *Theorema.*

SI exponatur series Primanorum multata serie secundanorum, Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta

Residua	Quadrata.	Cubi.
$aD - a^2$	$a^2D^2 - 2a^3D + a^4$	$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$
$bD - b^2$	$b^2D^2 - 2b^3D + b^4$	$b^3D^3 - 3b^4D^2 + 3b^5D - b^6$
$cD - c^2$	$c^2D^2 - 2c^3D + c^4$	$c^3D^3 - 3c^4D^2 + 3c^5D - c^6$
&c usq; ad	&c usque ad	&c usque ad
$DD - D^2$	$D^2D^2 - 2D^3D + D^4$	$D^3D^3 - 3D^4D^2 + 3D^5D - D^6$
$\frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{3}AD^2$	$\frac{1}{3}AD^4 - \frac{2}{4}AD^4 + \frac{1}{5}AD^4$	$\frac{1}{4}AD^6 - \frac{3}{5}AD^6 + \frac{3}{6}AD^6 - \frac{1}{7}AD^6$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}AD^2$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}AD^4$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2\times3} \times \frac{4}{4\times5} = \frac{1}{30}$	$\frac{1}{2\times3} \times \frac{4}{4\times5} \times \frac{6}{6\times7} = \frac{1}{140}$

Et sic deinceps; continue multiplicando Numeratores per numeros

numeros quadratos, & denominatores per binos continue sequentes arithmetice proportionales.

PROP. CXXXIV. *Corollarium.*

IDeoq; *Si series Æqualium multiplicata serie Primanorum respective ducatur in seriem Primanorum; Rectangulorum (aut ipsis æqualium vel etiam proportionalium Quadratorum aut figurarum quarumvis) aggregatum, ad aggregatum totidem æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet si Quadrata seriei illius in Quadrata hujus; Et cubi illius in cubos hujus, &c. respective ducantur.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. præced. Nam si ducatur

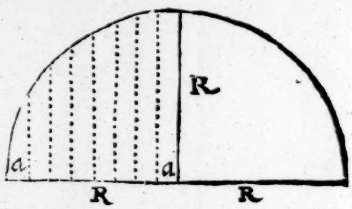
$D-a$ in a	$Q:D-a::D^2-2aD+D^2$ in a^2	$C:D-a::D^3-3aD^2\times 3a^2D-a^3$ in a^3
fiet $aD-a^2$ &c.	$a^2D^2-2a^3D+a$ &c.	$a^2D^3-3a^4D^2+3a^5D-a^6$ &c.

PROP. CXXXV. *Corollarium.*

IDeoq; *Semi-Circulus ad Quadratum Diametri (vel etiam Semi-Ellipsis ad Parallelogrammum Ellipsi circumscriptum) eam habet rationem quam habent Radices quadraticæ universales Residuorum seriei Primanorum serie Secundanorum multiplicatæ, ad seriem Primanorum illorum maximæ Æqualium. Totus itaq; circulus (aut Ellipsis) ad illud Quadratum (vel Parallelogrammum) rationem habebit illius duplam.*

Nam si diameter circuli (vel etiam ellipseos) ponatur D,

(cujus pars infinite parva $\frac{D}{\infty} = a$,) eique ordinatim-applicentur infinitæ rectæ (æqualiter ab invicem distantes) semicirculum (vel semi-ellipsen) complentes; erunt illæ (ut notum est) mediæ proportionales (vel saltem in ellipsi mediis illis proportionalibus proportionales) inter diametri segmenta; Pu a



inter	a	2a	3a	4a	
&	$D - a$	$D - 2a$	$D - 3a$	$D - 4a$	} &c.
ideoq;	$\sqrt{:aD - a^2:}$	$\sqrt{:2aD - 4a^2:}$	$\sqrt{:3aD - 9a^2:}$	$\sqrt{:3aD - 16a^2}$	
vel	$\sqrt{:aD - a^2;}$	$\sqrt{:bD - b^2:}$	$\sqrt{:cD - c^2:}$	$\sqrt{:dD - d^2:}$	

Adeoque omnium aggregatum, hoc est semicirculus, (vel semi-ellipsis) ad totidem ipsi $\sqrt{D^2}$ æqualiū, puta ad quadratum Diametri (saltem ad diametrum in altitudinem ductum)

ut $\sqrt{:aD - a^2:} + \sqrt{:bD - b^2:} + \sqrt{:cD - e^2:} +$ &c. usq; ad $\sqrt{:DD - D^2}$,

ad $\sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} +$ &c. $= A\sqrt{D^2} = AD$

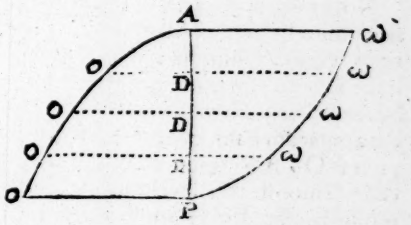
Ideoque circulus integer ad idem quadratum, ut $2\sqrt{:aD - a^2}$ &c. ad AD.

PROP. CXXXVI. *Corollarium.*

ET proinde, *Si supponamus semiparabolæ cujusvis infinitas rectas (ordinatim-applicatas) in ejusdem, inverso situ positæ, respectivas rectas duci; quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (vel ex Quadratis, aut aliis quidem figuris similibus, quæ rectangulis illis æquentur) erit ad æquè-altum Parallelepipedum congruum (nempe cujus basis æquentur Quadrato basis semiparabolæ) ut Semicirculus ad Quadratum*

dratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in ſubduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipſi.)

Sit eadem parabola APO ſitu directo, & PAω ſitu inverſo poſita : erunt igitur (ex natura Parabolæ) Quadrata ordinatim-applicatarum (nempe rectarum D O, D O, &c. deſcendendo ; vel Dω, Dω, &c. aſcendendo,) infinita ſeries Primanorum ; puta *a*, 2*a*, 3*a* &c.



vel eorum loco, *a*, *b*, *c*, &c. quorum maximum dicatur *D* (nempe quadratum baſis P O vel A ω:) Et propterea, eadem inverſo ſitu erunt $D - a$, $D - 2a$, $D - 3a$, &c. vel etiam $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c. (Æquale enim eſt ſingulorum incrementum, ſi a minimo ordiamur, atque decrementum, ſi ordiamur a maximo.) Et conſequenter ipſæ ordinatim-applicatæ (quippe in quadratorum ſuorum ratione ſubduplicata,) illic quidem $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, &c. vel $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. hic autem $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-2a}$. $\sqrt{:D-3a}$ &c. vel (eorum loco) $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-b}$. $\sqrt{:D-c}$ &c. Ductis igitur his in illas, emergunt rectangula O D ω. Nempe

Ductis	$\sqrt{:D-a}$.	$\sqrt{:D-b}$	$\sqrt{:D-c}$	&c.
In	$\sqrt{a}$.	$\sqrt{b}$.	$\sqrt{c}$.	&c.
Fient	$\sqrt{:aD-a^2}$.	$\sqrt{:bD-b^2}$.	$\sqrt{:cD-c^2}$.	&c.

Horum autem rectangulorum omnium aggregatum, ad rectangulum $\sqrt{:D-0}$. in $\sqrt{:D-0}$, hoc eſt $\sqrt{D^2}=D$ toties politum : Hoc eſt, ſolidum ex illa multiplicatione ortum, ad dictum Parallelepipedum : eſt ut ſemicirculus ad quadratum Diametri, per præcedentem.

Et propterea etiam mediæ proportionales inter contiguas re-

tas OD, Dω, erunt in ſubduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipſi. quippe quia rectangula ODω ſunt illis ordinatim applicatis proportionalia.

SCHOLIUM.

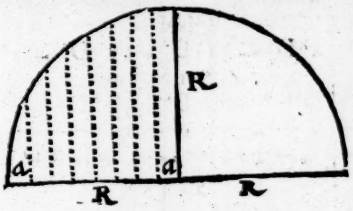
Nota tamen, non neceſſarium eſſe ut ſemi-parabola inverſo ſitu poſita ſit plane eadem cum ea quæ ponitur ſitu directo: nam res non minus ſuccedet in quibuſlibet duabus ſemiparabolis inverſo ſitu poſitis, modo æque altis. Ita tamen ut, ſi baſes habeant inæquales, baſis Parallelepipedi non ſumatur, utriuſvis Parabolarum baſis quadrato, ſed utriuſq; rectangulo æqualis, puta P O × A ω. quod monuiſſe ſufficiat, cum eadem quæ præceſſit demonſtratio, levi immutatione facta, etiam huc accommodari poſſit. Vel etiam hoc inde facile inferri poſſit.

Figura vero ex omnibus mediis proportionalibus (inter OD, Dω,) conſtans, erit quoddam Elliptoides: cujus nempe ordinatim applicatarum quadrata ſunt ipſis ordinatim applicatis in ellipſi proportionalia, ut patet. Sicut nempe in paraboloide Biquadratico ordinatim-applicatarum quadrata ſunt ordinatim applicatis in parabola proportionalia; Et quadrata ordinatim applicatarum in Parabola proportionalia ipſis in triangulo Ordinatim applicatis.

PROP. CXXXVII. *Corollarium.*

ITem, *Sphæroides (vel etiam Conoides aut Pyramidoides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Priſma circumſcriptum,) rationem habebunt eam quam habet quadruplum ſeriei Primanorum ſerie Secundanorum multatæ, ad ſeriem totidem Æqualium maximo Primanorum. Nempe ut* 2 *ad* 3.

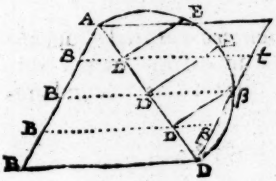
Cum



Cum enim rectæ in Circulo vel Ellipsi sint Duplum serici $\sqrt{:}$ a D $-$ a ^{2} : &c. Erunt plana in Conoide vel Pyramidoide ut Quadruplum ipsorum aD $-$ a ^{2} &c. Ideoq; ad Prisma vel Cylindrum circumscriptum, ut 4 ad 6, vel 2 ad 3. Per prop. 133. Quod & antea ostensum erat prop. 123.

PROP. CXXXVIII. *Corollarium.*

ITem, *Si Parallelogrammum linea diagonali dividatur; rectæq; unius trianguli in continuas rectas alterius trianguli ducantur, mediæ proportionales erunt totidem (vel circuli, vel saltem) Ellipseos ordinatim applicatæ; earúmq; quadrata aut circuli (aut figuræ quæcunq; similes) Pyramidoidis aut conoidis Elliptici Plana.*



Sequitur ex duabus præced. Nam rectæ conterminæ sunt instar segmentorum Diametri. An autem circulus, an Ellipsis prodibit; judicandum erit eodem indicio, quo in prop. 124.

PROP. CXXXIX. *Theorema.*

SI exponatur series primanorum mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua

Reſidua	Quadrata.	Cubi
$aD^2 - A^2$	$a^2D^4 - 2a^2D^2 + a^4$	$a^3D^6 - 3a^5D^4 + 3a^7D^2 - a^9$
&c. ad	&c. uſq; ad	&cuſq; ad
$DD^2 - D^3$	$D^2D^4 - 2D^2D^2 + D^6$	$D^3D^6 - 3D^5D^2 + 3D^7D^2 - D^9$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}AD^3$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}AD^6$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{10} = \frac{48}{1920}AD^9$
vel $\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$

Et ſic deinceps; puta

$$\frac{2\times4\times6\times8\times10}{6\times8\times10\times12\times14\times16}. \quad \frac{2\times4\times6\times8\times10\times12}{7\times9\times11\times13\times15\times17\times19} \text{ &c.}$$

PROP. CXL. *Coroll.*

IDem accidet, ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Secundanorum, ducatur in ſeriem Primanorum. Et illius Quadrata, Cubi, &c. in Quadrata, Cubos &c. hujus.

(Puta, ſi rectæ in ſemiparabola, diametro parallelæ, ducantur in rectas Parallelogrammi circumſcripti: nam earum continuationes, in complemento, ſunt ſeries Secundanorum.)

Quia nempe $D^2 - a^2$ in a eſt $aD^2 - a^3$. &c.

PROP. CXLI. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Quartanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$aD^1 - a^4$ &c.	$a^2D^6 - 2a^5D^3 + a^8$ &c.	$a^3D^9 - 3a^6D^6 + 3a^9D^3 - a^{12}$ &c.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}AD^4$	$\frac{1}{4} - \frac{2}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{2}AD^8$	$\frac{1}{8} - \frac{3}{20} + \frac{3}{40} - \frac{1}{120} = \frac{16}{420}AD^{12}$
vel $\frac{3}{2 \times 5}$	$\frac{3 \times 6}{3 \times 6 \times 9}$	$\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10 \times 12}$

Et ſic deinceps, puta $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12}{5 \times 8 \times 11 \times 14 \times 17}$. $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15}{6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18 \times 21}$. &c.

PROP. CXLII. *Coroll.*

IDem continget, ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Tertianorum, ducatur in ſeriem Primanorum.

(Puta, ſi rectæ paraboloidis Cubicalis diametro Parallelæ, ducantur in rectas Trianguli inſcripti: Nam earum continuationes in complemento, ſunt ſeries Tertianorum. Et ſimiliter mutatis mutandis, in aliis propoſitionibus.)

Quia nempe $D^3 - a^3$ in a, eſt $aD^3 - a4$.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit, mutatis mutandis, in aliis quibuſvis caſibus, ubi ſeries hujuſmodi componitur ex duabus vel pluribus aliis ſeriebus invicem multiplicatis. ut patet.

PROP. CXLIII. *Theorema.*

PAriter, ſi exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta	$\frac{4}{2 \times 6}$.	$\frac{4 \times 8}{3 \times 7 \times 11}$.	$\frac{4 \times 8 \times 12}{4 \times 8 \times 12 \times 16}$	$\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17 \times 21}$	&c.
Item	$\frac{5}{2 \times 7}$	$\frac{5 \times 10}{3 \times 8 \times 13}$	$\frac{5 \times 10 \times 15}{4 \times 9 \times 14 \times 19}$	$\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25}$	&c.

Et ſic deinces, ut poteſtas ſeriei ablatæ poſtulaverit: Prout inductione patebit. Ideoq; ----

PROP. CXLIV. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Reſidua ipſa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella: Sive, quam habent numeri Tabellæ, ad Unitatem. Nempe

Seriei Primanorum mulctatæ ſerie

	Reſidua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Secundan.	$\frac{1}{2\times3}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8\times9}$
Tertianor.	$\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$
Quartan.	$\frac{3}{2\times5}$	$\frac{2\times5}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$
Quintan.	$\frac{4}{2\times6}$	$\frac{4\times8}{3\times7\times11}$	$\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$
Sextanor.	$\frac{5}{2\times7}$	$\frac{5\times10}{3\times8\times13}$	$\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$
Septiman.	$\frac{6}{2\times8}$	$\frac{6\times12}{3\times9\times15}$	$\frac{6\times12\times18}{4\times10\times16\times22}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{5\times11\times17\times23\times29}$
Octavan.	$\frac{7}{2\times9}$	$\frac{7\times14}{3\times10\times17}$	$\frac{7\times14\times21}{3\times11\times18\times25}$	$\frac{7\times14\times21\times28}{5\times12\times19\times26\times33}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

PROP.

PROP. CXLV. *Theorema.*

Similiter, si exponatur series Secundanorum multata serie Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c; Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Secundanorum multatæ serie	Residua	Quadrata.	Cubi	Biquadrata.
Tertian.	1	1 × 2	1 × 2 × 3	1 × 2 × 3 × 4
	3 × 4	5 × 6 × 7	7 × 8 × 9 × 10	9 × 10 × 11 × 12 × 13
Quart.	2	2 × 4	2 × 4 × 6	2 × 4 × 6 × 8
	3 × 5	5 × 7 × 9	7 × 9 × 11 × 13	9 × 11 × 13 × 15 × 17
quintan.	3	3 × 6	3 × 6 × 9	3 × 6 × 9 × 12
	3 × 6	5 × 8 × 11	7 × 10 × 13 × 16	9 × 12 × 15 × 18 × 21
Sextan.	4	4 × 8	4 × 8 × 12	4 × 8 × 12 × 16
	3 × 7	5 × 9 × 13	7 × 11 × 15 × 19	9 × 13 × 17 × 21 × 25
Septim.	5	5 × 10	5 × 10 × 15	5 × 10 × 15 × 20
	3 × 8	5 × 10 × 15	7 × 12 × 17 × 22	9 × 14 × 19 × 24 × 29
Octav.	6	6 × 12	6 × 12 × 18	6 × 12 × 18 × 24
	3 × 9	5 × 11 × 17	7 × 13 × 19 × 25	9 × 15 × 21 × 27 × 33

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patet &c.

PROP. CXLVI. *Theorema.*

Item, Si exponatur series Tertianorum multata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c.

Reſidua ipſa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem Æqualium

Seriei Tertianorum mulctatæ ſerie

	Ref	Quadr.	Cubi.	Biquadrata.
Quartanorum	$\frac{1}{4\times5}$	$\frac{1\times2}{7\times8\times9}$	$\frac{1\times2\times3}{10\times11\times12\times13}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{13\times14\times15\times16\times17}$
Quintanorum	$\frac{2}{4\times6}$	$\frac{2\times4}{7\times9\times11}$	$\frac{2\times4\times6}{10\times12\times14\times16}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{13\times15\times17\times19\times21}$
Sextanorum	$\frac{3}{4\times7}$	$\frac{3\times6}{7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9}{10\times13\times16\times19}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{13\times10\times19\times22\times25}$
Septimanorũ	$\frac{4}{4\times8}$	$\frac{4\times8}{7\times11\times15}$	$\frac{4\times8\times12}{10\times14\times18\times22}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{13\times17\times21\times25\times29}$
Octavanorum	$\frac{5}{4\times9}$	$\frac{5\times10}{7\times12\times17}$	$\frac{5\times10\times15}{10\times15\times20\times25}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{13\times18\times23\times28\times33}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo facile erit vel has Tabellas quouſq; libet continuare, vel alias etiam pro ſeriebus ſequentibus componere; puta Seriebus Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. mulctatis ſeriebus quibuſlibet ſuperioris poteſtatis.

PROP.

PROP. CXLVII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum multata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium rationem habebunt cognitam.

Nempe eam quæ exhibetur prop. 153. Puta

Residua.	Quadrata	Cubi.
$\sqrt{a}D - \sqrt{a^2}$ &c. ad $\sqrt{DD} - \sqrt{D^2}$	$\sqrt{a^2}D^2 - 2\sqrt{a^3}D + \sqrt{a^4}$ &c usq; ad $\sqrt{D^2}D^2 - 2\sqrt{D^3}D + \sqrt{D^4}$	$\sqrt{a^3}D^3 - 3\sqrt{a^4}D^2 + 3\sqrt{a^5}D - \sqrt{a^6}$ &c. usq; ad $\sqrt{D^3}D^3 - 3\sqrt{D^4}D^2 + 3\sqrt{D^5}D - \sqrt{D^6}$
$\frac{1}{2}A\sqrt{D^2} \cdot \frac{2}{4}A\sqrt{D^2}$	$\frac{2}{4}A\sqrt{D^4} - \frac{4}{5}A\sqrt{D^4} + \frac{2}{6}AD^2$	$\frac{2}{5}AD^3 - \frac{6}{6}AD^3 + \frac{6}{7}AD^3 - \frac{2}{8}AD^3$
$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{6} + \frac{6}{7} - \frac{2}{8} = \frac{12}{1680} = \frac{1}{140}$
$\frac{2}{3 \times 4} = \frac{1}{2 \times 3}$	$\frac{2 \times 2}{4 \times 5 \times 6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5}$	$\frac{\times \times 3}{5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7}$

PROP. CXLVIII. *Corollar.*

IDem continget si series Æqualium multata serie Subsecundanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.

(Puta si ordinatim applicatæ in semi-parabola ducantur in earundem continuationes in ipsius complemento.) Nam $\sqrt{D} - \sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ facit $\sqrt{a}D - \sqrt{a^2} = \sqrt{a}D - a$. &c. Et facta ab eorum quadratis, æquantur quadratis horum &c.

PROP.

PROP. CXLIX. *Corollarium.*

Patet etiam; Eaſdem provenire rationes, ſive exponatur ſeries $a - a^2$ &c, *ſive ſeries* $\sqrt{a} - \sqrt{a^2}$ &c. (*vel* $\sqrt{a} - a$:)

Nempe, collatis Prop. 133. & 146.

SCHOLIUM.

Ideoque & reliqua quæ poſt Prop. 133. habentur Corollaria, huc etiam (mutatis mutandis) non difficulter transferri poſſent. quod monuiſſe ſufficiat.

PROP. CL. *Theorema.*

Si exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Radicum quadraticarum Tertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{a}\,D^2 - \sqrt{a^3}$ &c.	$\sqrt{a^2}\,D^4 - 2\sqrt{a^4}\,D^2 + \sqrt{a^6}$ &c.	$\sqrt{a^3}\,D^6 - 3\sqrt{a^5}\,D^4 + 3\sqrt{a^7}\,D^2 - \sqrt{a^9}$ &c.
$\frac{2}{4} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{6} + \frac{2}{8} = \frac{1}{192} = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{7} + \frac{6}{9} - \frac{2}{11} = \frac{256}{3465}$
$\frac{4}{3\times5}\ A\sqrt{}\,D^3$	$\frac{4\times1}{4\times6\times8}\ A\sqrt{}\,D^6$	$\frac{4\times4\times6}{5\times7\times9\times11}\ A\sqrt{}\,D^9$

PROP. CLI. *Coroll.*

Idem continget, ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Primanorum, ducatur in ſeriem Subſecundanorum.

Quia $D - a$ vel $\sqrt{}\,D^2 - \sqrt{}\,a^2$ in $\sqrt{a}$, facit $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$, vel $\sqrt{a}\,D^2 - \sqrt{a^3}$.

SCHOLIUM.

Et ſimiliter etiam alibi intelligendum eſt, ubi ſeries expoſita dividi poſſit, in duas vel plures componentes.

PROP.

PROP. CLII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Secundanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD^3} - \sqrt{a^4}$ &c.	$\sqrt{a^3D^6} - 2\sqrt{a^5D^3} + \sqrt{a^8}$ &c.	$\sqrt{a^3D^9} - 3\sqrt{a^6D^6} + 3\sqrt{a^9D^3} - \sqrt{a^{12}}$ &c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{7} + \frac{2}{10} = \frac{36}{280} = \frac{9}{70}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{8} + \frac{6}{11} - \frac{2}{14} = \frac{324}{6160} = \frac{81}{1540}$
$\frac{6}{3 \times 6}$	$\frac{6 \times 6}{4 \times 7 \times 10}$	$\frac{6 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 11 \times 14}$

Et ſic deinceps. Et ſimiliter in ſubductione ſeriei cujuſvis poteſtatis ſuperioris. Adeoq; ----

PROP. CLIII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Primanorum, Secundanorum; Tertianorum, &c. vel Radicum quadraticarum Tertianorum, Quintanorum, &c. Reſidua ipſa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Serie Subsecundanorum mulctatæ serie

	Residua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Primanor.	$\frac{2}{3\times4}$	$\frac{2\times2}{4\times5\times6}$	$\frac{2\times2\times3}{5\times6\times7\times8}$	$\frac{2\times2\times3\times4}{6\times7\times8\times9\times10}$
√Tertian.	$\frac{4}{3\times5}$	$\frac{4\times4}{4\times6\times8}$	$\frac{4\times4\times6}{5\times7\times9\times11}$	$\frac{4\times4\times6\times8}{6\times8\times10\times12\times14}$
Secundan.	$\frac{6}{3\times7}$	$\frac{6\times6}{4\times7\times10}$	$\frac{6\times6\times9}{5\times8\times11\times14}$	$\frac{6\times6\times9\times12}{6\times9\times12\times15\times18}$
√Quintan.	$\frac{8}{3\times9}$	$\frac{8\times8}{4\times8\times12}$	$\frac{8\times8\times12}{5\times9\times13\times17}$	$\frac{8\times8\times12\times16}{6\times10\times14\times18\times22}$
Tertianor.	$\frac{10}{3\times11}$	$\frac{10\times10}{4\times9\times14}$	$\frac{10\times10\times15}{5\times10\times15\times20}$	$\frac{10\times10\times15\times20}{6\times11\times16\times21\times26}$
√Septim.	$\frac{12}{3\times13}$	$\frac{12\times12}{4\times10\times16}$	$\frac{12\times12\times18}{5\times11\times17\times23}$	$\frac{12\times12\times18\times24}{6\times12\times18\times24\times30}$
Quartan.	$\frac{14}{3\times15}$	$\frac{14\times14}{4\times11\times18}$	$\frac{14\times14\times21}{5\times12\times19\times26}$	$\frac{14\times14\times21\times28}{6\times13\times20\times27\times34}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CLIV. *Theorema.*

Pariter, Si exponatur series Subtertianorum mulctata serie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, Quintanorum, Septimanorum, &c. Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio

Ratio quam habent ad seriem Æqualium.

Seriei Subtertianorum multatæ serie

Residua	Quadr.	Cubi	Biquadrata
√c. Secun. $\frac{3}{4\times5}$	$\frac{3\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{3\times2\times3}{6\times7\times8\times9}$	$\frac{3\times2\times3\times4}{7\times8\times9\times10\times11}$
Primanor. $\frac{6}{4\times6}$	$\frac{6\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{6\times4\times6}{6\times8\times10\times12}$	$\frac{6\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}$
√c. Quart. $\frac{9}{4\times7}$	$\frac{9\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{9\times6\times9}{6\times9\times12\times15}$	$\frac{9\times6\times9\times12}{7\times10\times13\times16\times19}$
√c. Quint. $\frac{12}{4\times8}$	$\frac{12\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{12\times8\times12}{6\times10\times14\times18}$	$\frac{12\times8\times12\times16}{7\times11\times15\times19\times23}$
Secundan. $\frac{15}{4\times9}$	$\frac{15\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{15\times10\times15}{6\times11\times16\times21}$	$\frac{15\times10\times15\times20}{7\times12\times17\times22\times27}$
√c. Septi. $\frac{18}{4\times10}$	$\frac{18\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{18\times12\times18}{6\times12\times18\times24}$	$\frac{18\times12\times18\times24}{7\times13\times19\times25\times31}$
√c. Octav. $\frac{21}{4\times11}$	$\frac{21\times14}{5\times12\times19}$	$\frac{21\times14\times21}{6\times13\times20\times27}$	$\frac{21\times14\times21\times28}{7\times14\times21\times28\times35}$
Tertianor. $\frac{24}{4\times12}$	$\frac{24\times16}{5\times13\times21}$	$\frac{24\times16\times24}{6\times14\times22\times30}$	$\frac{24\times16\times24\times32}{7\times15\times23\times31\times39}$

Et sic deinceps

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Et simili methodo non erit difficile & has Tabellas quousq; libet & continuare & alias etiam pro seriebus aliis componere; puta seriebus subquartanorum, subquintanorum, &c. (aut quidem radicum quadraticarum subtertianorum, subquintanorum, &c. vel radicum cubicarum subsecundanorum, subquartanorum &c. aut aliarum similium,) mulctatis seriebus quibuslibet superioris potestatis.

Sed & facile est has Tabellas (aliasque similiter condendas) interpolare, saltem quoad altitudinem, interponendo series transversas quotlibet, ut ex ipsa Tabellarum progressione rite considerata patebit.

Verbi gratia, in Tabella Prop. 144. Si series primanorum multetur serie Radicum quadraticarum Quintanorum, interponenda erit huic ablationi conveniens series alia transversa inter primam & secundam istius Tabellæ (quia nempe Radices quadraticæ Quintanorum, quarum index est $\frac{5}{2}$, vel $2\frac{1}{2}$, medium locum habent inter secundana & tertiana, quorum indices 2 & 3;) eritque series illa.

	Residua.	Quad.	Cubi.	Biquad
	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} \times 3$	$1\frac{1}{2} \times 3 \times 4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} \times 3 \times 4\frac{1}{2} \times 6$
	$2 \times 3\frac{1}{2}$	$3 \times 4\frac{1}{2} \times 6$	$4 \times 5\frac{1}{2} \times 7 \times 8\frac{1}{2}$	$5 \times 6\frac{1}{2} \times 8 \times 9\frac{1}{2} \times 11$
vel	3	3×6	$3 \times 6 \times 9$	$3 \times 6 \times 9 \times 12$
	2×7	$3 \times 9 \times 12$	$4 \times 11 \times 14 \times 17$	$5 \times 13 \times 16 \times 19 \times 22$
vel	6	6×6	$6 \times 6 \times 9$	$6 \times 6 \times 9 \times 12$
	4×7	$6 \times 9 \times 12$	$8 \times 11 \times 14 \times 17$	$10 \times 13 \times 16 \times 19 \times 22$

Atque idem etiam in aliis Tabellis præstare non erit difficile, si processum cujusvis Tabellæ attendatur.

At quo pacto licebit easdem Tabellas interpolare quoad latitudinem, seriebus scilicet erectis alias interponendo; (puta radicum universalium Residuorum, Radicum quadraticarum Cuborum, &c. vel Radicum cubicarum Residuorum, quadratorum, Biquadratorum, &c. vel similium;) non adeo facilis est labor, si quidem possibilis. Illud autem deinceps, quoad potero, conabor, & quidem aliquousque præstabo, licet illud universaliter efficere vix spondere ausim.

Interim de seriebus auctis aliqua dicenda sunt, ne videar eas penitus omittere; sed breviter, ne sim tædio.

PROP.

PROP. CLV. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Primanorum; Aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei R+a &c. ad R+R	Quadrata. $R^2+2aR+a^2$ &c. usq; ad $R^2+2RR+R^2$	Cubi. $R^3+3aR^2+3a^2R+a^3$ &c. usq; ad $R^3\,3RR^2+3R^2R+R^3$
$AR+\frac{1}{2}AR$ $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$AR^2+\frac{2}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2$ $1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	$AR^3+\frac{1}{2}AR^3+\frac{1}{3}AR^3+\frac{1}{4}AR$ $1+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ubi numerator quilibet conflat ex præcedentis duplo unitate aucto: Denominator ex præcedente unitate aucto.

PROP. CLVI. *Corollarium.*

IDeoq; *Si Trapezio (ex Parallelogrammo & Triangulo, æqualium basium & altitudinum, conflato) aptetur Conoides (vel Pyramidoides) truncatum (sive conversione circa axem, sive aliàs;) erit illud ad Cylindrum vel Prisma inscriptum, ut* $\frac{7}{3}$ *ad* 1, *vel, ut* 7 *ad* 3.

Nempe ut quadrata seriei Æqualium serie Primanorum auctæ, ad seriem Æqualium.

Sin Parrallelogrammi & Trianguli basis sint inæquales moderamen adhibendum est.

PROP. CLVII. *Corollarium.*

SI autem *Conoides vel Pyramidoides illud Cylindricè vel Prismaticè excavetur; residuum erit (ad exem-*

tum Cylindrum vel Prisma maximum inscriptum) ut 4 ad 3.

Nempe ut $\frac{1}{3} - \frac{1}{\infty} = \frac{4}{3}$ ad 1.

PROP. CLVIII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Secundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta, si Parallelogrammum complemento Semiparabolæ augeatur.)

Nempe, pro quovis termino seriei primanorum posito a (ad abbreviandam operationem) & propterea pro quovis termino secundanorum a^2, &c. Erunt

Aggregata $R^2 + a^2$ &c.	Quadrata. $R^4 + 2a^2R + a^4$ &c.	Cubi. $R^6 + 3a^2R^4 + 3a^4R^2 + a^6$ &c.
$1AR^2 + \frac{1}{2}AR^2$	$1AR^4 + \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$1AR^6 + \frac{3}{4}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$
$1 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$	$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$	$1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{248}{140}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si series Æqualium augeatur serie Tertianorum, Quartanorum, &c. Ut patet.

PROP. CLIX. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Subsecundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta si Parallelogrammum augeatur semiparabolâ.) Nempe

Aggregata

Aggregata	Quadrata	Cubi
$\sqrt{R}+\sqrt{a}$ &c.	$\sqrt{R^2}+2\sqrt{aR}+\sqrt{a^2}$ &c.	$\sqrt{R^3}+3\sqrt{aR^2}+3\sqrt{a^2R}+\sqrt{a^3}$ &c.
$A\sqrt{R}+\frac{2}{2}A\sqrt{R}$	$A\sqrt{R^2}+\frac{4}{3}A\sqrt{R^2}+\frac{2}{4}A\sqrt{R^2}$	$A\sqrt{R^3}+\frac{6}{4}A\sqrt{R^3}+\frac{6}{6}A\sqrt{R^3}+\frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$
$\frac{2}{2}+\frac{2}{3}=\frac{10}{6}=\frac{3}{2}$	$\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{2}{4}=\frac{68}{24}=\frac{17}{6}$	$\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{6}{6}+\frac{2}{5}=\frac{588}{240}=\frac{49}{20}$

PROP. CLX. *Theorema.*

SI series Æqualium augeatur serie Subtertianorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

*(Puta, si Parallelogrammum augeatur semiparaboloide Cubicali,) Nempe.

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{a}$ &c.	$\sqrt[3]{R^2}+2\sqrt[3]{aR}+\sqrt[3]{a^2}$ &c.	$\sqrt[3]{R^3}+3\sqrt[3]{aR^2}+3\sqrt[3]{a^2R}+\sqrt[3]{a^3}$ &c.
$1+\frac{2}{4}=\frac{7}{4}$	$1+\frac{6}{4}+\frac{2}{5}=\frac{31}{10}$	$1+\frac{9}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}=\frac{111}{20}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si exponatur series Æqualium aucta serie subquartanorum, subquintanorum, &c. vel etiam serie radicum-quadraticarum Cuborum, Surdesolidorum, &c. vel radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, &c. Et pariter in aliis.

PROP. CLXI. *Theorema.*

PAriter, si series Primanorum augeatur serie Secundanorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$aR+a^2$ &c.	$a^2R^2+2a^3R+a^4$ &c.	$a^3R^3+3a^4R^2+3a^5R+a^6$ &c.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}AR^2$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{31}{20}AR^4$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{209}{140}AR^6$

SCHOL.

SCHOLIUM.

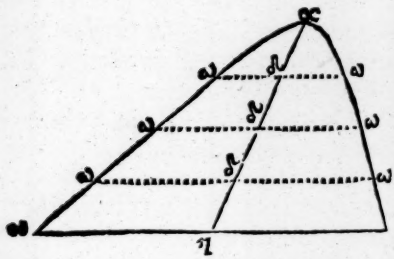
Et pari modo procedendum erit, si exponatur series primanorum (vel etiam Secundanorum, Tertianorum, &c.) auctæ serie quâlibet alia, ut non sit opus hîsce diutius immorari.

PROP. CLXII. *Corollarium.*

IDeoq; *Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad semissem Cylindri vel Prismatis circumscripti, est ut* 5 *ad* 6: *ad totum vero, ut* 5 *ad* 12.

Intellige, si tam transversa diameter, quam diameter intercepta maxima, ponatur æqualis lateri recto: secus enim adhibenda erit moderatio.

Nam, si ponatur Hyperbolæ latus rectum l vel R, transversa diameter $t = l$, & diameter intercepta d, erunt quadrata ordinatim applicatarum $dl + \frac{d}{t}dl$ (per prop. 33. Con. Sect.) vel (propter $t = l$) $dl + d^2$. Et propterea (cum sit l vel R, certa quantitas, & d mutabilis & quidem altitudini proportionalis, pro qua igitur substitui potest a, b, c, &c.) erunt omnium quadrata (adeoq; & plana Conoidis vel Pyramidoidis) series infinita Primanorum aucta serie Secundanorum; puta $aR + a^2$, $bR + b^2$, $cR + c^2$, &c. usq; ad $R^2 + R^2$. Adeoq; series illa ad semissem seriei totidem maximo ($R^2 + R^2 = 2R^2$) æqualium (puta ad AR^2) erit ut 5 ad 6, per præced. Et propterea ad integram illam seriem æqualium, ut 5 ad 12. Quod erat propositum.



SCHOL.

SCHOLIUM.

Idem tamen eveniet, si saltem sumatur Diameter-intercepta maxima æqualis Diametro-Transversæ. Ut colligi poterit ex propositione sequente.

PROP. CLXIII. *Corollarium.*

Si autem non adsit limitatio prop. præced. Erit ratio Conoidis vel Pyramidoidis ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, utut non eadem quæ illic innuitur, cognita tamen.

Cum enim, utcunq;, quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola sit $dl + \frac{dd}{t} l$, vel $dL + \frac{dd}{T} L$, vel $\frac{dT+dd}{T} L$, si pro diametris interceptis, d, d, &c. ponantur successive a, b, c, &c. sitq; omnium maxima D, adeoq; quadratum ordinatim-applicatæ maximæ $\frac{DT+DD}{T} L$. Erunt omnia $aT + bT + cT$ (&c. usq; ad DT) $= \frac{1}{2} ADT$; & omnia $a^2 + b^2 + c^2$ (&c. ad D^2) $= \frac{1}{3} AD^2$; quorum aggregatum $\frac{1}{2} ADT + AD^2$ si ducatur in L, & factum illud dividatur per T; prodibit $\frac{\frac{1}{2} ADT + \frac{1}{3} AD^2}{T} L$, vel etiam $\frac{\frac{1}{2} T + \frac{1}{3} D}{T} ADL$. vel deniq; $\frac{3T+2D}{6T} ADL$: Quam autem habet rationem $\frac{3T+2D}{6T} ADL$, aggregatum quadratorum omnium ordinatim-applicatarum; ad $\frac{DT+D^2}{T} AL$ vel $\frac{T+D}{T} ADL$, aggregatum totidem Quadrato maximæ æqualium: eam habet Conoides vel Pyramidoides illud, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, (propter plana quadratis illis proportionalia;) nempe, ut $\frac{3T+2D}{6T}$, ad $\frac{T+D}{T}$, vel, ut $3T + 2D$ ad $6T + 6D$. vel, ut $\frac{1}{2} T + \frac{1}{3} D$ ad $T + D$. Adeoq; ---

PROP.

PROP. CLXIV. *Coroll.*

UT semissis Diametri Transversæ auctus triente Diametri Interceptæ, ad Transversæ & Interceptæ aggregatum; seu, ut Triplum Transversæ simul cum Duplo Interceptæ, ad simul utriusq; sextuplum: sic est Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi) circumscriptum.

Patet ex præcedente.

PROP. CLXV. *Corollarium.*

ITem, *Hyperbola ad Parallelogrammum circumscriptum, est ut Series Radicum-universalium seriei Primanorum serie Secundanorum respectivè auctæ, ad seriem totidem Radicum maximæ æqualium.*

Nempe si adsit limitatio prop. 162, ut $\sqrt{:}\ aR+a^2:+\sqrt{:}\ bR+b^2:+\sqrt{:}\ cR+c^2:$ &c. (usq; ad $\sqrt{:}R^2+R^2:$) ad $A\sqrt{:}R^2+R^2:=A\sqrt{2}R^2=AR\sqrt{2}$ Hoc est, ut omnes ordinatim-applicatæ ad maximam toties positam.

Si verò illa limitatio non adsit; saltem erit ut $\sqrt{:}\ \frac{aT+a^2}{T}\ L:+\sqrt{:}\ \frac{bT+b^2}{T}\ L:+\sqrt{:}\ \frac{cT+c^2}{T}\ L:$ &c. (usq; ad $\sqrt{:}\ \frac{DT+D^2}{T}\ L:$) ad $A\sqrt{:}\ \frac{DT+D^2}{T}\ L:$ Hoc est, (dividendo omnia per $\sqrt{L}$ & multiplicando in $\sqrt{T}$) ut $\sqrt{:}\ aT+a^2:+\sqrt{:}\ bT+b^2:\sqrt{:}cT+c^2:$ &c. (usq; ad $\sqrt{:}\ DT+D^2:$) ad $A\sqrt{:}\ DT+D^2:$ ut patet ex demonstratione prop. 163.

SCHOLIUM.

At quo pacto tandem ratio aggregati radicum illarum universalium, ad aggregatum totidem maximæ æqualium, numeris explicari poterit, non ita facile ostendetur.

Adeoq; & hic incidimus in eandem difficultatem in quadratura Hyperbolæ, quam supra aliquoties meminimus de quadratura

dratura Circuli vel Ellipſeos, (aliarumq; aliquot curvarum:) nempe ut inquiratur jam ratio quam habet infinita ſeries Radicum universalium Binomiorum, ſicut illic Apotomarum.

Et quidem aliquando proclivis eram ut crederem rem planè impoſſibilem eſſe ut Radices ſurdæ numero infinitæ & invicem incommenſurabiles ita in unum aggregatum coire poſſint ut illud, ad expoſitam aliquam quantitatem rationalem, rationem habent explicabilem.

Atq; hoc quidem eo magis adhuc confirmatum eſſe videbatur, quoniam ejuſmodi ſeries finita ad ſeriem totidem maximæ æqualium vix aliam paſſa eſt rationis explicationē quam omnes ſigillatim repetendo, raro enim duæ vel plures occurrunt commenſurabiles quæ in unam additione colligi poſſint.

Verbi gratia, ſi ponatur circuli radius partium 6 ſinus recti in Quadrante ſingulis partium iſtarum terminis inſiſtentes, erunt, $\sqrt{:36-0:}+\sqrt{:36-1:}+\sqrt{:36-4:}+\sqrt{:36-9:}+\sqrt{:36-16:}+\sqrt{:36-25:}+\sqrt{:36-36:}$ (per ea quæ dicta ſunt ad pr. 121.) vel quod eodem recidit, $\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+0$; vel, ut irrationalitas ad minimos terminos reducatur, $6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0$: Ratio igitur quam habet illud radicum aggregatum ad radicem maximam toties poſitam, puta $7\sqrt{:36-0:}$ vel 7×6 hoc eſt 42; non explicatius efferri poteſt quam $\frac{6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0}{42}$.

Atq; ea eſt ratio quam habent illi ſinus recti in Quadrante ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Quadrato circumſcripto.

Pariter, ſi ponatur radius partium 10; erunt ſinus recti $\sqrt{:100-0:}+\sqrt{:100-1:}+\sqrt{:100-4:}+\sqrt{:100-9:}+\sqrt{:100-16:}+\sqrt{:100-25:}+\sqrt{:100-36:}+\sqrt{:100-49:}+\sqrt{:100-64:}+\sqrt{:100-81:}+\sqrt{:100-100:}$: Hoc eſt $\sqrt{100}+\sqrt{99}+\sqrt{96}+\sqrt{91}+\sqrt{84}+\sqrt{75}+\sqrt{64}+\sqrt{51}+\sqrt{36}+\sqrt{19}+\sqrt{0}$. Vel etiam $10+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+\sqrt{51}+\sqrt{19}+0$. quod aggregatum non aliter abbreviari poteſt quam pro $10+8+6+0$ ſuſtinendo 24; ut ratio iſtius aggregati ad radicem maximam toties poſitam, puta ad $11\sqrt{100}$ vel 11×10 vel 110, non explicatius efferri poteſt quam $\frac{24+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+\sqrt{51}+\sqrt{19}}{110}$;

quæ minus adhuc videtur intelligibilis quam ubi ponitur radius partium pauciorum, puta 6.

Atq; eodem modo quo plures ſupponuntur radii partes eò intricatior neceſſe eſt ut fiat rationis explicatio; quæ quidem fere omnium radicum repetitionem poſtulet, cum paucæ admodum, raro quidem, & non niſi fortuitò quaſi, occurrunt, quæ vel rationales ſint vel quidem invicem commenſurabiles. Et propterea ſi ſupponatur Radius partium infinitarum, ratio proveniens etiam minus adhuc videatur explicabilis.

Idem contingeret, ſi, juxta tenorem prop. 135. ponatur circuli Diameter partium 12. Ita enim eſſent Sinus recti correſpondentes in Semicirculo, $\sqrt{:}0\times12-0:+\sqrt{:}1\times12-1:+\sqrt{:}2\times12-4:+\sqrt{:}3\times12-9:+\sqrt{:}4\times12-16:+\sqrt{:}5\times12-25:+\sqrt{:}6\times12-36:+\sqrt{:}7\times12-49:+\sqrt{:}8\times12-64:+\sqrt{:}9\times12-81:+\sqrt{:}10\times12-100:+\sqrt{:}11\times12-121;+\sqrt{:}12\times12-144$. Hoc eſt $\sqrt{:}0-0:+\sqrt{:}12-1:+\sqrt{:}24-4:+\sqrt{:}36-9:+\sqrt{:}48-16:+\sqrt{:}60-25:+\sqrt{:}72-36:+\sqrt{:}84-49:+\sqrt{:}96-64:+\sqrt{:}108-81:+\sqrt{:}120-100:+\sqrt{:}132-121:+\sqrt{:}144-144$. Hoc eſt $\sqrt{0}+\sqrt{11}+\sqrt{20}+\sqrt{27}+\sqrt{32}+\sqrt{35}+\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+\sqrt{0}$. Vel propter eaſdem radices bis poſitas, $2\sqrt{0}+2\sqrt{11}+2\sqrt{20}+2\sqrt{27}+2\sqrt{32}+2\sqrt{35}+\sqrt{36}$ Vel, reducendo irrationalitatem ad minimos terminos, $0+2\sqrt{11}+4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+8\sqrt{2}+2\sqrt{35}+6$. Ratio igitur quam habet hoc aggregatum ad totidem radices maximæ æquales, puta ad $13\sqrt{36}$ vel 13×6, hoc eſt, ad 78, non explicatius efferri poterit quam $\frac{2\sqrt{11}+4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+8\sqrt{2}+2\sqrt{35}+6}{78}$, vel $\frac{\sqrt{11}+2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{35}+3}{39}$. Atq; ea eſt ratio quam habet aggregatum iſtorum Sinuum rectorum in Semicirculo, ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Parallelogrammo huic ſemicirculo circumſcripto. Si autem ſinus maximus $\sqrt{36}=6$ ſupponatur bis poni (pro utroq; ſcilicet quadrante ſemel) atq; eapropter pro 13 æqualibus, ponantur 14; (puta, pro $13\times6=78$ ponatur $14\times6-8\frac{4}{13}$) eadem erit hæc ratio cum ea quam ſupra provenire diximus poſito radio partium ſex.

Pariter, ſi Diameter ponatur partium 20; ſinus recti in Semicirculo erunt $\sqrt{:}0\times20-0:+\sqrt{:}1\times20-1:+\sqrt{:}2\times20-4:+\sqrt{}$

$\dagger\sqrt{:3\times20-9}:\dagger\sqrt{:4\times20-16}:\dagger\sqrt{:5\times20-25}:\dagger\sqrt{:6\times20-36}:\dagger\sqrt{:7\times20-49}:\dagger\sqrt{:8\times20-64}:\dagger\sqrt{:9\times20-81}:\dagger\sqrt{:10\times20-100}:\dagger\sqrt{:11\times20-121}:\dagger\sqrt{:12\times20-144}:\dagger\sqrt{:13\times20-169}:\dagger\sqrt{:14\times20-196}:\dagger\sqrt{:15\times20-225}:\dagger\sqrt{:16\times20-256}:\dagger\sqrt{:17\times20-289}:\dagger\sqrt{:18\times20-324}:\dagger\sqrt{:19\times20-361}:\dagger\sqrt{:20\times20-400}$. Hoc eſt $\sqrt{0}\dagger\sqrt{19}\dagger\sqrt{36}\dagger\sqrt{51}\dagger\sqrt{64}\dagger\sqrt{75}\dagger\sqrt{84}\dagger\sqrt{91}\dagger\sqrt{96}\dagger\sqrt{99}\dagger\sqrt{100}\dagger\sqrt{99}\dagger\sqrt{96}\dagger\sqrt{91}\dagger\sqrt{84}\dagger\sqrt{75}\dagger\sqrt{64}\dagger\sqrt{51}\dagger\sqrt{36}\dagger\sqrt{19}\dagger\sqrt{0}$. Vel $2\sqrt{0}\dagger2\sqrt{19}\dagger2\sqrt{36}\dagger2\sqrt{51}\dagger2\sqrt{64}+2\sqrt{75}+2\sqrt{84}\dagger2\sqrt{91}+2\sqrt{96}\dagger2\sqrt{99}+\sqrt{100}$. (Nempe iidem ipſi qui ſupra in quadrante habentur poſito radio partium 10, bis hic poſiti; niſi quod ſinus maximus utriq; quadranti communis non repetatur.) Vel etiam $0+2\sqrt{19}\dagger12+2\sqrt{51}\dagger16+10\sqrt{31}\dagger+\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}\dagger6\sqrt{11}+10$. Vel deniq; (quia $0+12+16+10=38$) $38\dagger2\sqrt{19}+2\sqrt{51}\dagger10\sqrt{3}\dagger+4\sqrt{21}\dagger2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}$. Adeoq; ratio quam habet aggregatum illud radicum, ad maximam toties poſitam, (puta $21\times10=210$)

eſt $\frac{38+2\sqrt{19}+2\sqrt{51}\dagger10\sqrt{3}\dagger+\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}.}{210}$

vel $\frac{19+\sqrt{19}+\sqrt{51}+5\sqrt{3}+2\sqrt{21}+\sqrt{91}+4\sqrt{6}+3\sqrt{11}.}{105}$

Et quidem quo plures ponantur Radii vel Diametri partes, eò minus videtur explicabilis ratio ſinuum omnium ad maximum toties ſumptum: adeóq; ſi ſupponantur radii vel diametri partes infinitæ, (quod ad ſcopum noſtrum faciendum videtur,) ratio ſinuum omnium ad radium toties poſitum, hoc eſt, Quadrantis vel Semicirculi ad Quadratum vel Parallelogrammum circumſcriptum, videatur penitus inexplicabilis, ſaltem niſi ejuſmodi explicatio ſufficere judicanda ſit, qualem prop. 121 & 135 exhibuimus.

His itaq; perpenſis, prope abfuit ut rem quaſi penitus conclamatam ulterius inveſtigando deſiſterem. Id unicum quod ſpem fecit hoc erat. Nempe quod eâdem difficultate non obſtante, in radicibus quadraticis, cubicis, biquadraticis &c. numerorum Arithmetice proportionalium res non male ſucceſſit.

Nam, verbi gratia, ſi ſeries Subſecundanorum aliquouſq; continuetur, puta $\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$, ipſius ratio ad maximum toties poſitum, puta $7\sqrt{6}$, non videtur aliàs ex-

plicabilis quam $\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel, $\frac{0+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel saltem (propter $0+1+2=3$) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$; nisi forsan placeat tam antecedentem quam consequentem rationis ducere in $\sqrt{6}$, ut prodeat ratio $3\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}+\sqrt{36}$, ad 7; vel potius $3\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}+6$, ad 7. Et similiter in aliis ejusmodi seriebus.

Verum si eadem series supponatur in infinitum continuanda, prodibit tandem ratio $\frac{2}{3}$, vel 2 ad 3, aut 1 ad $1\frac{1}{2}$. ut dictum est prop. 53,54. ipsa quidem infinitate (quod mirum videatur) irrationalitatem destruente.

Et similiter in subtertianis, subquartanis, &c. continget, ut patet ex superius traditis prop. 54,59.

Cum itaq;, illa difficultate non obstante, quadratura Parabolæ & ab aliis antehac & a nobis etiam nostra methodo, sed & Paraboloideos cujusvis quadratura (eâdem manente difficultate) a nobis in superioribus satis feliciter tradita sit; non plane omnis aberat spes rationem tandem inveniendi quam Radicum universalium (seriei vel auctæ vel mulctatæ) series habeat ad seriem æqualium, & quidem si non universaliter, in quibusdam saltem, quadantenus explicandi; fortassis etiam in illis ipsis quæ Circuli vel Ellipseos, & quæ Hyperbolæ quadraturam attingunt nonnihil proficere.

Ut autem quid deinceps sit inquirendum rectiùs perspiciatur, meminisse licet nos (inter alia) circuli (vel etiam Ellipseos cujusvis) quadraturam huc usq; perduxisse.

Nempe, per prop. 118, & 121, si rationum series illa $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \frac{384}{945}$, &c. interpolari poterit; ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet Circuli Quadrans ad Quadratum Radii, vel Circulus ipse ad quadratum Diametri.

Item, per prop 133, & 135, si interpolari poterit rationum series ista $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet semicirculus ad Quadratum diametri.

Sed & insuper, si interpolari poterint numeri diagoniales tabellæ

bellæ prop. 132 nempe 1, 2, 6, 20, 70, &c. ratio quam habet unitas ad numerum eorundem primo & secundo intermedium, est ea quam habet Circulus ad Quadratum Diametri: Et Ellipsis ad Parallelogrammum circumscriptum. Ut deinceps probabitur, ex prop. seq.

PROP. CLXVI. *Theorema.*

SI series infinita Æqualium, Primanorum, Secundanorum, aut Tertianorum, &c. respective ducatur in seipsam inverse positam; atq; eadem etiam in seipsam directe positam: erit aggregatum rectangulorum illorum, ad aggregatum horum; ut 1 ad 1, 2, 6, 20, 70, &c. numeros diagoniales Tabellæ prop. 132.

Nam si series Æqualium in seipsam (sive directe sive inverse positam) respective ducatur, fit series Æqualium: cui convenit ratio 1 ad 1.

Si autem series Primanorum in seipsam directe positam fiq multiplicetur; fiet series Secundanorum; si series Secundanorum sic ducatur, fiet series Quartanorum; si series Tertianorum, fiet series Sextanorum; &c. per prop. 73. Quibus conveniunt rationes $\frac{1}{3} . \frac{1}{5} . \frac{1}{7} . \frac{1}{9}$. &c. per prop. 44 vel 64.

Si autem Series Primanorum respective ducatur in seipsam inversam; (puta series a, b, c, &c. in seriem $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c.) Item series Secundanorum in seipsam inversam, (puta series a^2, b^2, c^2, &c. in seriē $\mathfrak{Q} : D - a . \mathfrak{Q} : D - b . \mathfrak{Q} : D - c$ &c. vel $D^2 - 2aD + a^2$. $D^2 - 2bD + b^2$. $D^2 - 2cD + c^2$. &c.) Item series Tertianorum in seipsam inversam; (puta series a^3, b^3, c^3, &c. in seriem $C : D - a$, $C : D - b$. $C : D - c$. &c.) Et sic de reliquis; Rationes ipsis convenient, $\frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. per prop. 133, 134.

Ratio igitur rationum harum ad rationes illas, ea est quam habet 1 ad numeros 1, 2, 6, 20, 70, &c. nempe numeros diagoniales tabellæ prop. 132 (ut ex calculo patet) Quod erat demonstrandum.

$\frac{1}{3}) \frac{1}{6} (\frac{1}{1}$
$\frac{1}{3}) \frac{1}{6} (\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}) \frac{1}{30} (\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}) \frac{1}{140} (\frac{1}{20}$
$\frac{1}{9}) \frac{1}{630} (\frac{1}{70}$

SCHOL.

SCHOLIUM.

Notandum hic, in serie rationem $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, &c. Denominatores sive consequentes sunt Arithmetice proportionales; adeoq; si in singulis intervallis totidem essent interponendæ rationes, essent illæ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$, &c. juxta analogiam Arithmetice-proportionalium, & leges prop. 44, & 64.

In serie vero rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c; consequentes 1, 6, 30, 140, 630, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, &c. vel $1 \times \frac{12 \times 20 \times 28 \times 36}{2 \times 4 \times 6 \times 8}$ &c. (ubi fractionum tam numeratores quam denominatores sunt Arithmetice proportionales.) Et propterea (juxta progressionis illius analogiam) si numerus primo & secundo interponendus dicatur A; fient reliqui, reliquis intervallis interponendi, continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{16 \times 24 \times 32}{3 \times 5 \times 7}$ &c. (Et quidem numerus primo anteponendus $\frac{1}{3}$A; juxta eandem analogiam. In præcedenti autem, & propterea in mox sequenti serie, numerus primo anteponendus evanescit; nempe, illic in nihil, iſtic in infinitum.)

In serie deniq; rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{70}$, &c. Consequentes 1, 2, 6, 20, 70, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c vel $1 \times \frac{4 \times 12 \times 20 \times 28}{2 \times 4 \times 6 \times 8}$ &c. (ubi, ut supra, tam numeratores quam denominatores fractionum sunt Arithmetice-proportionales.) Et propterea (juxta progressionis analogiam) si numerus primo & secundo interponendus dicatur α, fiunt reliqui continuâ multiplicatione numerorum $\alpha \times \frac{8 \times 16 \times 24}{3 \times 5 \times 7}$ &c.

PROP. CLXVII. *Coroll.*

IDeoq; Si series infinita Subsecundanorum (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) respective ducatur in seipsam inversam (puta $\sqrt{:} D - a. \sqrt{:} D - b. \sqrt{:} D - c.$ &c. atq; eadem etiam in seipsam directe positam: (puta series $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in seriem $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c},$ &c.)

&c.) erit aggregatum rectangulorum illorum (puta $\sqrt{:}\, a\,D - a^2 : + \sqrt{:}\, b\,D - b^2 : + \sqrt{:}\, c\,D - c^2 :$ &c.) ad aggregatum horum (puta $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}$ &c. vel $a + b + c$ &c.) ut unitas ad numerum intermedium, numeris diagonialibus 1, 2, in Tabella prop. 132 interponendum.

Sequitur ex præcedente. Nam series Subsecundanorum est seriei Æqualium, & seriei Primanorum intermedia. (ut patet ex dictis prop. 64.)

Series autem Subsecundanorum in seipsam directe positam (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ &c) est series Primanorum (puta $\sqrt{a^2}, \sqrt{b^2}, \sqrt{c^2}$ &c vel a, b, c, &c.) cui convenit ratio $\frac{1}{2}$ per prop. 44, vel 64. Et propterea, si ratio quæ convenit seriei Primanorum in seipsam inversam ductæ (intermedia nempe rationibus $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}$,) dicatur $\frac{1}{2\square}$: Ratio rationis hujus $\frac{1}{2\square}$ ad illam $\frac{1}{2}$, puta $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2\square}$ ($\frac{1}{\square}$, erit (per præced.) ea quam habet 1 ad numerum inter 1 & 2 interponendum, in serie digonialium 1, 2, 6, 20, 70, &c. tabellæ prop. 132. *Qui numerus igitur in posterum dicatur* $\square$. Estq; semissis numeri inter 1 & 6 interponendi in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.

PROP. CLXVIII. *Corollar.*

ET propterea; *Circulus ad quadratum diametri, est ut* 1 *ad* $\square$, *numerum nempe inter* 1 *&* 2 *interponendum in serie diagonalium* 1, 2, 6, 20, 70, *&c. tabellæ prop.* 132.

Cum enim (per prop. 133, 135.) Semicirculus ad Quadratum diametri sit ut 1 ad 2 $\square$ (numerum intermedium inter 1 & 6 in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.) erit circulus (quippe semicirculi duplus) & 1 ad $\square$, (numerum intermedium inter 1 & 2 in serie 1, 2, 6, 20, 70, &c.) per præced,

Et quidem eadem ratio $\frac{1}{\square}$; ea est, quæ intermedia ponenda est inter $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{3}$, in serie $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$ &c. prop. 118, & 121. ut & deinceps etiam ulterius patebit.

SCHOL.

SCHOLIUM.

Cum igitur (ut ad ea quæ monuimus in Schol. prop. 165. tandem redeamus;) res eò redacta sit, ut si possimus rationes illas interpolare (prop. 118. memoratas) $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. hoc est, quas habet 1 ad 1, $\frac{2}{2}, \frac{16}{8}, \frac{105}{48}$, &c. (hoc est, ad 1, $1\frac{2}{2}$, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{2}{8}$, &c.) qui termini consequentes fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$

Vel etiam illas (prop. 133.) $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}$, &c. quarum termini consequentes 1, 6, 30, 140, &c. fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18 \text{ \&c.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ \&c.}}$

Vel deniq; si illas $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}$, &c; nempe quas habet 1 ad 1, 2, 6, 20, &c. (numeros diagoniales tabellæ prop. 132.) qui fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{14}{4}$ &c.

Si, inquam, harum rationum seriem unam aliquam interpolare possimus, habebitur accuratissima circuli quadratura. Et quidem in prima & tertia interponenda erit (post primam) ratio $\frac{1}{\square}$: in secunda vero ratio $\frac{1}{2\square}$. Adeoq; interpolatione in una præstita, in reliquis etiam non difficulter fiet.

Placet igitur (ut inde exordium sumamus, unde major elucet spes quæsitum consequendi) Tabellam illam prop. 132. aggredi, ut videamus numquâ possimus arte illam interpolare: Adeóq;, ipsam repetere intermissis alternatim spaciis, (ut quæ istic sunt series prima, secunda, tertia, &c. sint hic secunda, quarta, sexta, &c.) Et paulo accuratius examinare; quod sequentibus aliquot propositionibus fiet.

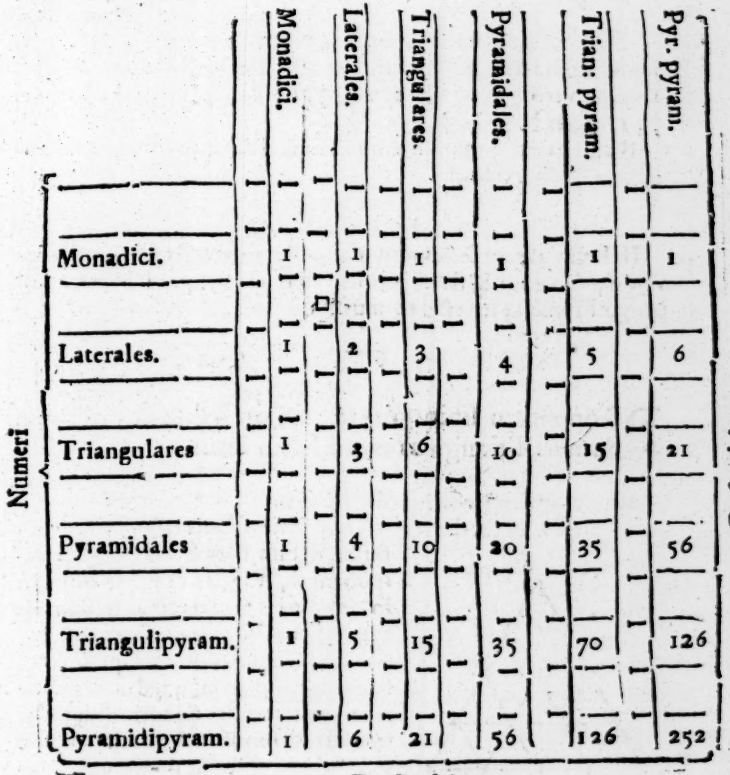
PROP. CLXIX. *Theorema.*

NUmeri omnes Tabellæ prop. 132. sunt figurati. Nempe, qui in illius serie primâ (sive erecta sive transversa) sunt monadici; qui in tertia, Triangulares; qui in quarta, Pyramidales; & sic deinceps, puta Trianguli pyramidales, Pyramidi-pyramidales, &c.

Numer-

Patet hoc inſpecta tabella: & comparatis (ſi opus) iis, quæ de numeris figuratis apud Maurolicum aut alios occurrunt. Nominibus autem illis utor, quibus Dn. Oughtredus noſtras (Mathematicus eximius) in ipſius *Clavi Mathematicæ* cap. 17. n. 11.

Quæ autem ſunt in illa tabella prop. 132. ſeries prima, ſecunda, tertia, &c. jam in eadem hic reperita fiunt (propter intermiſſa ſpatia, numeris, ſi fieri poſſit, replenda) ſecunda, quarta, quinta, &c.



PROP. CLXX. *Theorema.*

SEries duæ, in exposita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari possunt (locis interponendis quotlibet;) interpositis scil. illic quot opus est, unitatibus, hic, totidem mediis Arithmeticis.

Puta, si placet unum ubiq; numerum interponere; erit monadicorum series interpolata, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Lateralium vero $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6. vel $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, 6.

Ratio patet; quoniam numeri sunt illic æquales, hic Arithmetice-proportionales.

SCHOLIUM.

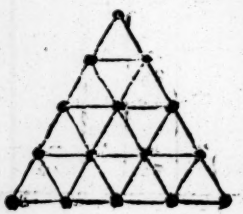
Reliquæ autem series non ita facile interpolantur, nisi invento prius cujusq; seriei proprio charactere; quod sequentibus propositionibus investigabimus.

PROP. CLXXI. *Lemma.*

PRoposito sit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulares, ad suum latus.

Illud hoc progressu investigabimus.

1. Si puncta totidem, quot numerus aliquis triangularis postulat, debita forma triangulari disponantur, & rectis conjungantur, ut in appositio schemate; manifestum est totam figuram triangularem in tot triangula dividi (tam toti quam inter se similia) quot est quadratū numeri lateralis unitate minuti. (quod si opus sit, demonstrari potest ex 19 e 6.) Adeoq; si ipsius numerus lateralis sit *l*, erit numerus triangulorum parti-



particularium $Q:l-1:=l^2-2l+1$.

2. Quum horum triangulorum quodlibet habeat tres angulos, erit horum angulorum numerus $3l^2-6l+3$.

3. Notandum est ad totius figuræ tria puncta angularia, non nisi tot angulos apponi (nempe ad singula unum:) & propterea illi tres anguli occupant tria puncta, seu $3P$.

4. Ad reliqua puncta in lateribus, terminantur anguli terni; quorum igitur quilibet occupat trientem puncti. Sunt autem intermedia illa puncta lateralia, in quolibet latere $l-2$, ergo in omnibus $3l-6$, (nempe propter tria latera;) & anguli ad hæc intermedia puncta adjacentes $9l-18$, (propter ternos angulos ad singula puncta;) quorum quilibet occupat trientem puncti, seu $\frac{1}{3}P$; adeoque omnes occupant $\frac{9l-18}{3}P$.

5. Ad reliqua quæ supersunt puncta, intra aream figuræ, terminantur anguli seni (ad quodlibet nempe latus,) qui propterea occupant sextantem puncti. Quot autem illi sunt anguli, sic colligitur. Totus angulorum numerus est (ut diximus) $3l^2-6l+3$: Hinc si subducantur 3 (ad totius figuræ angulos positi,) & $9l-18$ (ad puncta lateralia adjacentes) manebunt $3l^2-15l+18$; qui est numerus angulorum ad puncta intra aream terminatorum. Cum verò horum quilibet occupat sextantem puncti, sive $\frac{1}{6}P$; occupabunt hi omnes $\frac{3l^2-15l+18}{6}P$.

6. Deniq;, si simul addantur puncta sic inventa; nempe $3P$ & $\frac{9l-18}{3}P$ & $\frac{3l^2-15l+18}{6}P$; erit horum aggregatum $\frac{l^2+l}{2}$ Puncta; numerus punctorum omnium: Hoc est, numerus triangularis cujus latus l. Ideoq; ----

PROP. CLXXII. *Theorema.*

LAtus numeri cujusvis Triangularis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^2+l}{2}$

Ut ostensum est in præced.

Adeoq; , dato latere l dabitur numerus Triangularis isti lateri conveniens, puta $n = \frac{l^2 + l}{2}$.

Et contra, Dato numero Triangulari, invenietur ipsius latus.

Nempe, resolvendo hanc Æquationem $2n = l^2 + l$, erit $\sqrt{:\frac{1}{4} + 2n:} - \frac{1}{2} = l$.

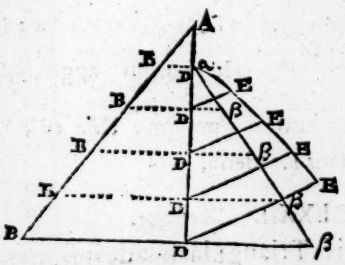
PROP. CLXXIII. *Coroll.*

SI Hyperbolæ Diameter transversa sit 1, *& Latus rectum* $\frac{1}{2}$; *sumptis diametris (puncto applicationis & vertice interceptis)* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. Ordinatim-applicatarum quadrata erunt* 1, 3, 6, 10, 15. *&c. nempe numeri triangulares, cujus latera sunt* 1, 2, 3, 4, 5, *&c.*

Probatur per 17 vel 33 prop. Con. Sect. nost. Hyperbolam ipsam exhibebit figura prop. seq.

PROP. CLXXIV. *Corollarium.*

ITem, *si fiant ad eandem rectam* $A\alpha D$ *duo triangula similia,* $\alpha D\beta$, ADB; *sitq; ut* 1 *ad* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *sic* AD *ad* DB *&* αD *ad* $D\beta$; *& sumantur æquales* $A\alpha = 1 = \alpha D = DD$ *&c. Rectangula* $BD\beta$, $BD\beta$, *&c. erunt ad invicem ut* 1, 3, 6, 10, *&c. numeri triangulares, quorum latera sunt* αD, αD, *&c. Mediæ vero proportionales inter* BD, $D\beta$; DB, $D\beta$ *&c, sunt ordinatim-applicatæ in Hyperbola* ADE; *cujus diameter transversa* $A\alpha$, *& latus rectum* αB, *vel ipsi æquale.*



Patet ex calculo. Nam rectangulorum $BD\beta$, primum erit $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 1$. Secundum $2\sqrt{\frac{1}{2}} \times 3\sqrt{\frac{1}{2}} = 3$. Tertium $3\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\times 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 6$. Quartum $4\sqrt{\frac{1}{2}} \times 5\sqrt{\frac{1}{2}} = 10$. Et sic deinceps. Quæ sunt quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola, per præced. ideoq; Mediæ proportionales puta $\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{10}$, &c. ipsæ ordinatim-applicatæ.

SCHOLIUM.

Si autem sumpta fuissent AD = DB & ωD = Dβ, tum rectangula fuissent $1 \times 2 = 2$. $2 \times 3 = 6$. $3 \times 4 = 12$. $4 \times 5 = 20$, &c. dupla numerorum triangularium: & Mediæ proportionales $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}$, &c. essent ordinatim-applicatæ in Hyperbola, cujus tam latus rectum quam latus transversum sit 1. ut, ex dictis, consideranti patebit.

PROP. CLXXV. *Theorema.*

SEries numerorum Triangularium, in præmissa tabella, commode interpolari poterit, si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ, quot opus est, & ex iis formentur numeri triangulares, juxta prop. 172.

Puta si in serie numerorum triangularium 1, 3, 6, 10, 15, &c. unus ubiq; interponendus est numerus; eorum latera 1, 2, 3, 4, 5, &c. mediis arithmeticis debite interpolata erunt $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5$, &c. quibus lateribus (per prop 172.) respondent numeri triangulares, $\frac{3}{8}, 1, 1\frac{7}{8}, 3, 4\frac{3}{8}, 6, 7\frac{7}{8}, 10, 12\frac{3}{8}, 15, 17\frac{7}{8}, 21$, &c. Vel $\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}, 3, \frac{35}{8}, 6, \frac{63}{8}, 10, \frac{99}{8}, 15, \frac{143}{8}, 21$, &c. Vel deniq; $\frac{1}{8}, \frac{8}{8}, \frac{15}{8}, \frac{24}{8}, \frac{35}{8}, \frac{48}{8}, \frac{63}{8}, \frac{80}{8}, \frac{99}{8}, \frac{120}{8}, \frac{143}{8}, \frac{168}{8}$, &c. quorum quidem differentiæ sunt Arithmetice-proportionales.

Pari modo, si interponendi sint in singulis intervallis duo loci; prodirent numeri, $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, 1, \frac{14}{9}, \frac{20}{9}, 3, \frac{35}{9}, \frac{44}{9}, 6, \frac{65}{9}, \frac{77}{9}, 10$. &c. Vel $\frac{2}{35}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{14}{9}, \frac{20}{9}, \frac{27}{20}$, &c. quorum item differentiæ sunt Arithmetice proportionales.

PROP.

PROP. CLXXVI. *Lemma.*

PRopoſitum ſit inquirere quam habeant rationem numeri Pyramidales, ad latus ſuum.

Liceret & hanc propoſitionem pari progreſſu inveſtigare, quo in prop. 171 uſus ſum : (obſervato interim diſcrimine quo differt debita numeri pyramidalis diſpoſitio a diſpoſitione numeri Triangularis:) quod qui volet experiri poterit. Verum cum non ita facile eſſet lectori concipere debitum punctorum ſitum in pyramide (ut quæ non omnia ſupponenda ſunt in eodem plano) & angulorum ſolidorum ad ea puncta poſitionem : ſatius videtur illud hac quæ ſequitur methodo præſtare. (Quæ quidem, niſi mallem utrumq; modum oſtendiſſe, adhiberi potuiſſet etiam ad prop. 171.)

1 Numerus Pyramidalis æquatur aggregato numerorum triangularium (ut patet ex dictis ad prop. 130. & 132.) nempe ab unitate ad numerum Triangularem ſibi collateralem inclusive. (ſicut & numeri Triangulares ſiunt aggregatione Lateralium; & Laterales, Monadicorum ; ut & Triangulipyramidales, Pyramidalium; & ſic deinceps.)

2. Eſt autem lateris l, numerus quilibet Triangularis $\frac{l^2+l}{2}$ per prop. 171.

3. Ergo, ſumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c; vel (eorum loco) a, b, c, d, &c ; ſumma horum a^2+a, b^2+b, c^2+c, d^2+d, &c, erit duplum aggregati Triangularium; (quorum numerus erit æqualis lateri maximi:) & hujus propterea ſemiſſis, erit numerus Pyramidalis, cujus latus æquatur lateri maximi Triangularium.

$$\begin{array}{r|l} & a^2+a \\ 2) & b^2+b \\ & c^2+c \\ & d^2+d \\ & \&c \\ \hline & \text{Num. Pyramid.} \end{array}$$

4. Eſt igitur numerus Pyramidalis ſemiſſis aggregati duarum ſerierum; eouſq; ab unitate continuatarum, donec numerus locorum æquetur lateri numeri Pyramidalis quæſiti, quod ſupponatur l: Quibus ſi præponatur locus alter 0^2+0, (ut ſeries intelligantur ab 0 inchoatæ,) fiet harum numerus $l+1$. Et utriuſq;

utriusq; seriei summa seorsim innotescet per prop. 2 & 20.

5. Nempe, summa seriei primanorum $0+a+b+c$. &c, quorum ultimum est l, numerus locorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2}\,l$. per prop. 2.

6 Et summa seriei secundanorum $0+a^2+b^2+c^2$ &c, quorum ultimum est l^2 & numerus locorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3}\,l^2+\frac{l+1}{6l}\,l^2$ vel $\frac{l+1}{3}\,l^2+\frac{l+1}{6}\,l$. per Prop. 20.

7 Utriusq; igitur summæ aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2}\,l$ & $\frac{l+1}{3}\,l^2+\frac{l+1}{6}\,l$,) nempe $\frac{3l^3+3l^2+2l^2+l^2+l}{6}$ $\frac{2l^3+6l^2+4l}{6}$, est aggregatum duarum serierum; cujus aggregati semissis $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$ est numerus pyramidalis cujus latus l. Ideoq; -----

PROP. CLXXVII. *Theorema.*

LAtus numeri cujusvis Pyramidalis ad ipsum numerum suum, est ut l ad $\frac{l^2+2l^2+2l}{6}$

Ut ostenditur est in præced.

At, dato numero pyramidali n, non innotescit ipsius latus, nisi resolvendo Æquationem Cubicam $6n=l^3+3l^2+2l$.

PROP. CLXXVIII. *Theorema.*

SEries numerorum Pyramidalium, in præmissa tabella commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ quot opus est, & ex iis formentur numeri pyramidales, juxta prop. præced.

Puta, si numerorum pyramidalium 1,4,10,20,35,56, &c. latera

latera 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. si impolata sint $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. hisce lateribus respondebit serie pyramidalium $\frac{5}{16}$, 1, $2\frac{3}{16}$, 4, $6\frac{5}{16}$, 10, $14\frac{7}{16}$, 20, $26\frac{13}{16}$, 35 $44\frac{33}{16}$, 56, &c. vel etiam $\frac{5}{16}$, 1, $\frac{35}{16}$, 4, $\frac{101}{16}$, 10, $\frac{231}{16}$, 20, $\frac{429}{16}$, 35, $\frac{715}{16}$, 56, &c. Vel potius $\frac{15}{48}$, 1; $\frac{105}{48}$, 4, $\frac{336}{48}$, 10, $\frac{693}{48}$, 20, $\frac{1287}{48}$, 35, $\frac{3145}{48}$, 56, &c.

PROP. CLXXIX. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulipyramidales ad latus suum.

Præstabitur hoc eâdem methodo quâ prop. 176. Nempe.

1. Numerus Triangulipyramidalis æquatur aggregato numerorum omnium Pyramidalium (intellige, quorum latera sunt numeri integri, nam de interpolatis hic non agitur,) ab unitate ad numerum sibi collateralem, inclusive.

2. Est autem lateris l, numerus Pyramidalis $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$ per prop. 177.

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c. vel (eorum loco) a, b, c, d, &c. summa horum a^3+3a^2+2a, b^3+3b^2+2b, c^3+3c^2+2c, d^3+3d^2+2d, &c. erit sextuplum aggregati Pyramidalium (quorum omnium numerus erit æqualis lateri eorum maximi, ut patet:) & propterea hujus aggregati sextans erit numerus Triangulipyramidalis, cujus latus idem erit cum latere maximi Pyramidalium.

$$6) \begin{matrix} a^3+3a^2+2a \\ b^3+3b^2+2b \\ c^3+3c^2+2c \\ d^3+3d^2+2d \\ \&c. \end{matrix}$$

Num. Triangulipyram.

4 Adeoq; numerus Triangulipyramidalis est sexta pars aggregati trium serierum, eousq; ab unitate continuatarum donec numerus terminorum sit æqualis lateri numeri Triangulipyramidalis propositi, quod dicatur l: adeoq; si ipsis præponatur terminus alter 0^3+0^2+0 (ut series intelligantur ab 0 inchoatæ) fiet numerus terminorum $l+1$. Et singularum serierum illarum; summa seorsim innotescet per prop. 2. 20. & 40.

5 Nempe

5 Nempe ſumma duplicatæ ſeriei Primanorum, $0+2a+2b+2c$, &c. cujus terminus ultimus $2l$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2}\,2l$. per prop. 2.

6 Summa triplicatæ ſeriei ſecundanorum, $0+3a^2+3b^2+3c^2$ &c, cujus terminus ultimus $3l^2$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3}\,3l^2+\frac{l+1}{6l}\,3l^2$. per prop. 20.

7. Summa ſeriei Tertianorum, $0+a^3+b^3+c^3$ &c. cujus terminus ultimus l^3, numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{4}\,l^3+\frac{l+1}{4l}\,l^3$. per prop. 40.

8. Harum igitur ſummarum aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2}\,2l+\frac{l+1}{3}\,3l^2+\frac{l+1}{6l}\,3l^2+\frac{l+1}{4}\,l^3+\frac{l+1}{4l}\,l^3$.) nempe $\frac{24l^3+24l+24l^3+24l^2+12l^2+12l+6l^4+6l^3+6l^3+6l^2}{24}$ $=\frac{6l^4+36l^3+66l^2+36l}{24}$ eſt aggregatum trium illarum ſerierum; cujus aggregati ſextans $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$ eſt numerus Triangulipyramidalis cujus latus l, Ideoq; ----

PROP. CLXXX. *Theorema.*

LAtus numeri Triangulipyramidalis ad ipſum numerum, eſt ut l ad $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Adeoq;, Dato latere l dabitur numerus Triangulipyramidalis, puta $n=\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Dato autem numero Triangulipyramidali, non invenitur ipſius latus niſi reſolvendo hanc æquationem $24n=l^4+6l^3+11l^2+6l$.

PROP. CLXXXI. *Theorema.*

SEries numerorum Triangulipyramidalium, in præmissa Tabella, commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus, tot interponantur medii Arithmetici, quot opus est, & ex iis formentur numeri Triangulipyramidales, per præcedentem.

Puta lateribus interpolatis $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. respondent numeri Triangulipyramidales $\frac{35}{128}$, 1, $2\frac{59}{128}$, 5, $9\frac{3}{128}$, 15, $23\frac{59}{128}$, 35, 50 $\frac{35}{128}$, 70, $94\frac{123}{128}$, 126, &c. vel etiam $\frac{35}{128}$, 1, $\frac{315}{128}$, 5, $\frac{1155}{128}$, 15, $\frac{3003}{128}$, 35, $\frac{6435}{128}$, 70, $\frac{32175}{128}$, 126, &c. Vel potius $\frac{105}{384}$, 1, $\frac{945}{384}$, 5, $\frac{3465}{384}$, 15, $\frac{9009}{384}$, 35, $\frac{19305}{384}$ 70, $\frac{36465}{384}$, 126, &c.

PROP. CLXXXII. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere, quam ad latus suum rationem habeant sequentium serierum numeri Figurati puta Pyramidipyramidales, &c.

Posset quidem hoc præstari eadem methodo quâ usus sum ad prop. 176, & 179. ope propositionum ibidem memoratarum, nempe pr. 2, 20, & 40, simul cum prop. 43. saltem si prius ulterius prosecuti fuerimus traditionem rationum quas habent series finitæ Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, (cum sequentibus,) ad series Æqualium; quam traditionem non nisi leviter innuimus ad prop. 43. Eam vero siquis ulterius continuandam velit, licebit ipsi vel alia quæ sibi maxime placeat methodo id præstare, vel etiam (nisi meliora ipsi occurrant auxilia) ope hujus ipsius quam jam præ manibus habemus Tabellæ, postquam viâ mox docenda ostenderimus rationes numerorum figuratorum ad suum cujuslibet latus in sequentibus seriebus investigare. Nam ut ad prop. 176 & 179, ex cognitis rationibus simplicium serierum finitarum (puta Primanorum,

Secunda-

Secundanorum, Tertianorum, per prop. 2, 20, 40. ad ſeriem Æqualium) inveſtigantur rationes hujus Tabellæ (puta numerorum Triangularium, Pyramidalium, Triangulipyramidalium, ad ſua reſpective latera:) ita, vice verſa, ex cognitis his licebit & illas expiſcari, adeoq; illam propoſitionis 43 traditionem quouſq; libet continuare.

Quoniam autem illud (ut diximus) non niſi leviter traditum eſt ad prop. 43. Nec quidem neceſſe ſit ad præſens inſtitutum illud ulterius proſequi, cum ex cognitis paucarum iſtius Tabellæ ſerierum characteribus (ſive rationibus quas numeri iſti figurati habent ad ſua reſpective latera) ſequentium etiam characteres inveſtigandi methodus eluceſcat, ego illa ut faciliori jam utar, quæ hæc eſt.

Patet ex præmiſſis, character ſeriei numerorum.

Monadicorum 1. $\frac{1^2+1}{2}$

Lateralium 1. Triangulorum

Pyramidaliū $\frac{1^3+3\,1^2+2\,1}{6}$ Triangulipyram. $\frac{1^4+6\,1^3+11\,1^2+6\,1}{24}$.

Patet etiam, accuratius intuenti, characteres hos fieri continua multiplicatione harum quantitatum,

$1\times\frac{1}{1}\times\frac{1+1}{2}\times\frac{1+2}{3}\times\frac{1+3}{4}$ &c. vel $1\times\frac{1\text{ in }1+1\text{ in }1+2\text{ in }1+3}{1\text{ in }2\text{ in }3\text{ in }4}$.

Nam $1\times\frac{1+0}{1}=1$.

$$1\times\frac{1+1}{2}=\frac{1^2+1}{2}$$

$$\frac{1^2+1}{2}\times\frac{1+2}{3}=\frac{1^3+3\,1^2+2\,1}{6}$$

$$\frac{1^3+3\,1^2+2\,1}{6}\times\frac{1+3}{4}=\frac{1^4+6\,1^3+11\,1^2+6\,1}{24}$$

Adeoq;, ſi continuetur ulterius multiplicatio rationis ultimo inventæ in $\frac{1+4}{5}\times\frac{1+5}{6}\times\frac{1+6}{7}$ &c. habebimus ſequentium ſerierum characteres.

Puta. $\frac{1^5+10\,1^4+35\,1^3+50\,1^2+24\,1}{120}$.

Item $\frac{1^6 + 151^5 + 851^4 + 2251^3 + 2741^2 + 1201}{120}$

Et sic deinceps, quousq; libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop 43. Quoniam vero illud fortasse non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in transitu ostendere. Quod quidem ut sine incommodo hic possit inseri, ita quibusdam forsan ingratum non erit. Ideoq;, exempli gratia, ----

Propositum sit inquirere, quam habeat rationem series finita Quartanorum, (ab o inchoata,) ad seriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Triangulipyramidalis, (per prop. 180:) est $\frac{1^4 + 61^3 + 111^2 + 61}{24}$ Et Pyramidi-pyramidalis $\frac{1^5 + 101^4 + 351^3 + 501^2 + 241}{120}$ per prop. 182.

2. Est autem, (ut sæpius dictum est,) numerus Figuratus uniusgradus (in præsenti tabella) aggregatum omniū præcedentium in gradu sibi proximo: Adeoq; numerus Pyramidipyramidalis, est aggregatum Triangulipyramidalium.

$$24 \Big) \begin{matrix} 0^4 + 0^3 + 0^2 + 0 \\ a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a \\ b^4 + 6b^3 + 11b^2 + 6b \\ c^4 + 6c^3 + 11c^2 + 6c \\ \&c. \text{ ad} \\ 1^4 + 61^3 + 111^2 + 61 \end{matrix} \Big\} \text{Addita.}$$

$$\frac{1^5 + 101^4 + 351^3 + 501^2 + 241}{24 \times 5 = 120} \text{ Aggregatū}$$

3. Et propterea, sumptis lateribus 1,2,3, &c. vel (eorum loco) a, b, c, &c. (quorum maximum dicatur l) & formatis inde numeris Triangulipyramidalibus; Horum aggregatum erit numerus Pyramidipyramidalis ejusdem lateris, nempe $\frac{1^5 + 101^4 + 351^3 + 501^2 + 241}{120}$.

4 Sum-

4. Summa autem ſeriei $0+6a+6b+6c$ &c, eſt (per prop. 2.)
$\frac{l+1}{2}\,6l = \frac{6l^2+6l}{2}$.

5. Summa ſeriei $0+11a^3+11b^3+11c^3$ &c. eſt (per p. 20)
$\frac{l+1}{3}\,11l^2 + \frac{l+1}{6l}\,11l^2 = \frac{11l^3+11l^2}{3} + \frac{11l^2+11l}{6} = \frac{22l^3+33l^2+11l}{6}$.

6. Summa ſeriei $0+6a^3+6b^3+6c^3$ &c, eſt (per prop. 40.)
$\frac{l+1}{4}\,6l^3 + \frac{l+1}{4l}\,6l^3 = \frac{6l^4+6l^3}{4} + \frac{6l^3+6l^2}{4} = \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}$.

7. Hæ tres ſummæ in unam collectæ, ſunt
$\frac{6l^2+6l}{2} + \frac{22l^3+33l^2+11l}{6} + \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4} = \frac{9l^4+40l^3+60l^2+29l}{6}$.

8. Si igitur ex vigintiquadruplo totius aggregati, auferatur ſumma trium ſerierum.

Nempe ſi ex 5) $l^3+10l^4+35l^3+50l^2+24l$.
auferatur 6) $9l^4+40l^3+60l^2+29l$

Hoc eſt, Si ex 30) $6l^4+60l^4+210l^3+300l^2+144l$
auferatur 30) $+45l^4+200l^3+300l^2+145l$

Manebit ſumma
ſeriei quartæ, quę 30) $6l^3+15l^4+10l^4+00l^2-1l$
eſt Quartanorũ

Hoc eſt $6l^3+6l^4$
30) $+9l^4+9l^2$
$+1l^3+1l^2$
$-1l^2-1l$

Hoc eſt $\frac{l+1}{5}\,l^4 + \frac{3l+3}{10}\,l^3 + \frac{l+1}{30}\,l^2 - \frac{l+1}{30}\,l$

Quæ

Quæ est igitur summa seriei Quartanorum cujus terminus ultimus est l^4 numerus terminorum $l+1$.

Vel; si pro numero terminorum $l+1$, substituatur n, & propterea series æqualium nl^4; erit series Quartanorum $\frac{1}{5}nl^4 + \frac{2}{10}nl^3 + \frac{1}{30}nl^2 - \frac{1}{30}nl$. (si nempe terminus primus sit 0, secundus 1:) vel $\frac{nl^4}{5} + \frac{3nl^3}{10l} + \frac{nl^2}{30l^2} - \frac{nl}{30l^3}$.

9. Adeoq; series finita Quartanorum ad seriem totidem maximo Æqualium est ut $\frac{1}{5} + \frac{3}{10l} + \frac{1}{30l^2} - \frac{1}{30l^3}$ ad 1. Quod erat inquirendum.

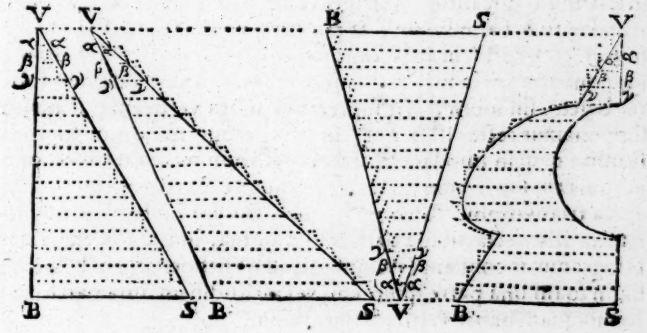
Et pari modo, his cognitis, ratio quam habet ad seriem Æqualium series Quintanorum, invenietur ope characteris in proxima præsentis tabellæ serie: Et deinde, quam habet series Sextanorum, ope characteris seriei proxime subsequentis in hac tabella; & sic deinceps quousq; libet.

Quo melius autem hoc intelligatur, operæ fortasse pretium erit, quæ jam tradita sunt, paulo distinctius aperire: Utut enim ea satis aperte tradidisse nos nobis videamur, fieri tamen potest ut lector illis minus assuetus nonnunquam forsan hæsitet.

Notandum igitur est, nos hic (ut & alibi semper, ubi de finita serie verba fiunt,) numerum terminorum assignare $l+1$ (nempe si terminus primus 0, secundus dicatur 1,) nimirum unitate majorem quam est numerus particularum ex quibus conflatur terminus maximus, hoc est, omnium differentiarum terminorum continue positorum, quarum omnium aggregato terminus maximus æquatur; sive differentiæ illæ sint æquales, ut in serie primanorum, (puta 1,1,1,1, &c, differentiæ numerorum arithmetice proportionalium,) sive crescentes, ut in serie secundanorum, tertianorum, &c. (puta 1,3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum quadraticorum, vel 1,7,19,37, &c, differentiæ numerorum cubicorum; &c:) sive etiam decrescentes, ut in serie subsecundanorum, subtertianorum &c; (nam verbi gratia, differentia $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ minor est quam $\sqrt{2} - \sqrt{1}$, atq; hæc minor quam $\sqrt{1} - \sqrt{0}$; & sic in cæteris.) Harum omnium differentiarum (in qualibet serie) numerus l, unitate minor est quam numerus terminorum, ut patet; earumq; omnium aggregatum (propter termini primi 0 nullitatem) est ipse terminus

minus maximus. Ubi autem numerus terminorum dicitur n, numerus differentiarum, sive particularum in maximo, erit $n-1$.

Exsemplum esto, series primanorum, quale est Aggregatum parallelogrammorum æque altorum figuram triangulo inscriptam complentium: quorum si primum dicatur 0, (quippe nullius latitudinis, utut altitudinis ejusdem cum reliquis;)



secundum 1, &c. omnium numerus 16, erunt differentiæ 15, (invicem æquales, nempe 1 ubiq;) & maximum propterea 15. Adeoq; cum in singulis parallelogrammis altitudo communis sit $\frac{1}{16}$ VB (in fig. 1.) & latitudinum incrementum continuum $\frac{1}{16}$ BS: Omnes simul altitudines, hoc est, figuræ inscriptæ altitudo, VB $= \frac{16}{16}$ VB; at omnia simul latitudinum incrementa, hoc est, Basis figuræ inscriptæ, non BS, sed $\frac{15}{16}$ BS, sive BS $- \frac{1}{16}$ BS. Si autem uno adhuc gradu ulterius procedatur, adjuncto infra basem uno adhuc parallelogrammo, erit quidem illius latitudo BS præcise, sed altitudo jam fiet auctior, nempe VB $+ \frac{1}{16}$ VB. Si vero (ut in fig. 2.) sumatur figura ex parallelogrammis circumscripta, erunt tum omnium simul parallelogrammorum altitudines, hoc est, figuræ circumscriptæ altitudo, VB (quam finge jam basi perpendicularem,) tum latitudinum simul omnes particulæ, hoc est, basis figuræ circum-

cumſcriptæ, BS præciſe: at vero jam non ab o ſed 1, ſeries inchoatur: ſin ſeries hæc ſupra verticem uno adhuc gradu continuetur (ut inchoetur ab o,) erit jam altitudo ſic aucta VB + $\frac{1}{\infty}$ VB, ut patet. Adeoq; figura inſcripta uno infra baſin gradu continuata, & figura circumſcripta continuata uno gradu ſupra verticem, tantundem valent.

Atq; hoc totum in triangulo (atq; eadem ratione in figuris aliis, niſi quod illic incrementa ſint inæqualia) ſatis eſt manifeſtum. Nam (præterquam quod ex jam dictis ſatis pateat) ſi in triangulo ducantur quotlibet rectæ baſi parallelæ (in quarum cenſu & baſin ipſam, & punctum verticis, cenſeri volumus,) eiſq; totidem adjaceant parallelogramma; ſi illa omnia ſupponantur infra ſuas rectas jacere, erit eorum infimum ſubter baſem, ſin ſupra, erit ſupremum ſupra verticem; ſi autem ſupponamus rectas illas neq; in parallelogrammorum ſuorum ſummo neq; in imo jacere, ſed per ipſorum media tranſire, tum eorum tam ſupremum quam infimum erit partim intra partim extra triangulum. Adeoq; quemcunq; ſitum habere ſupponantur illæ rectæ ad ſua parallelogramma, figura illa ex parallelogrammis conſtans (dummodo ab o inchoetur) habebit vel baſin ſuam una parte minorem, vel altitudinem una parte majorem quam habet verum illud triangulum.

Atq; hic quidem ſive exceſſus ſive defectus, quamdiu de finita ſerie agitur, omnino animadvertendus eſt: ubi autem de ſerie infinita agitur, tuto poterit negligi. Cum enim quo plures ſupponantur termini eo minor illa evadat ſive baſium ſive altitudinum differentia, ubi in infinitum proceditur evaneſcet, quippe $\frac{1}{\infty}$ (pars infinite parva) habenda erit pro nihilo; (ea ſaltem adhibita limitatione de qua mox dicetur.) Sic, verbi gratia, ſi triangulo cujus altitudo A, baſis B, inſcribatur figura ex parallelogrammis quorum ſingulorum altitudo $\frac{1}{\infty}$ A, & longitudinum incrementa $\frac{1}{\infty}$ A, erit inſcriptæ altitudo $\infty \times \frac{1}{\infty} A = A$, baſis non B ſed $B - \frac{1}{\infty} B$: eſt enim altitudinum numerus ∞, at differentiarum $\infty - 1$. Si vero figura ſic inſcripta continuetur uno gradu infra baſem, vel circumſcripta uno gradu ſupra verticem, erit baſis $\infty \times \frac{1}{\infty} B = B$, altitudo $A + \frac{1}{\infty} A$; quippe jam numerus incrementorum eſt ∞, altitudinum $\infty + 1$. Ubi igitur de ſerie finita agitur, per altitudinem & Baſin intelligendæ ſunt altitudo & baſis figuræ ſic adſcriptæ (ſive inſcripta ſit,

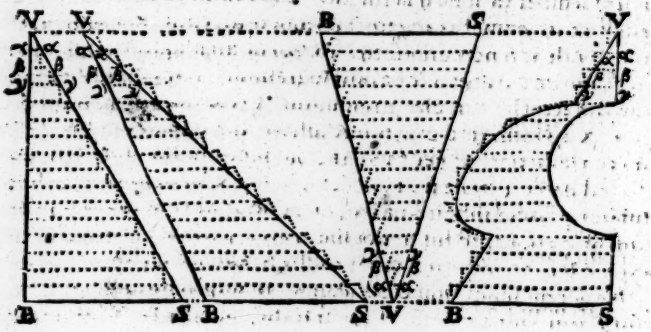
ſive circumſcripta) non autem iſtius cui adſcribitur; at vero in ſerie infinita perinde eſt ſive hujus ſive illius intelligantur, propter differentiã infinite exiguam, adeoq; evaneſcentem ſive nullam. Nam ∞, $\infty + 1$, $\infty - 1$, perinde ſunt. Et quemadmodũ ubi polygonum infinitorum laterum, pro circulo habetur, perinde eſt ſive inſcriptum ſive circumſcriptum intelligatur, (hoc eſt, ſive ſupponatur circuli radius æqualis rectæ quæ a centro ad angulos, ſive illi quæ a centro ad medium lateris ducitur, quarum differentia, propter latera numero infinita, eſt infinite exigua:) ſic in adſcriptionibus noſtris perinde eſt (propter differentiam infinite parvam) an inſcriptæ an circumſcriptæ altitudo aut baſis ſumatur pro verâ. Et quidem ut in polygono infinitorum laterum inſcripto & circumſcripto, latera ſupponuntur invicem æqualia, hoc eſt, ejuſdem arcus ſinus rectus & tangens æquales tam invicem quam ipſi arcui, ita & hic figuræ ex parallelogrammis inſcriptæ & circumſcriptæ tam baſes quam altitudines ſupponendæ ſunt æquales tam inter ſe quam illius cui adſcribuntur; hoc eſt, ſi accurate loqui libeat, non niſi infinite exigua ſui parte differre.

Eodem modo, in fig. prop. 5. Figura ex ſimilibus ſectoribus ſpirali inſcripta, ſi ſectorum numerus ſit finitus, erit ſeries finita, cujus terminus primus eſt 0, ultimus verò ſectorum inſcriptorum ultimus (cujus radius eſt una parte minor, quam ultimi circumſcriptorum,) omniumq; horum ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquantur ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe qui eſt figuræ ex ſectoribus conflatæ cõterminus, non qui cõterminus eſt veræ ſpiralis; at ſi numerus ſectorum (prout ibi ſupponitur) ſupponatur infinitus, erunt adhuc omniũ ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquales ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe contermini figuræ ex his infinitis ſectoribus conflatæ, qui tamen vel ille ipſe eſt cum contermino veræ ſpirali, vel ipſo ſaltem infinite-exigua ſui parte (hoc eſt, nihilo,) minor. Si vero pro ſectoribus inſcriptis ſumantur circumſcripti, arcus circuli contermini erit una ſui parte augendus (ſive finita ſive infinita, pro numero ſectorum) ut ipſius ſemiſſis æqualis habeatur omnibus ſectorum arcubus ſimul ſumptis, adeoq; ſupponendus eſt incepiſſe uno gradu ante initium veræ ſpiralis, ut primi ſectoris arcus ſit 0: nam in arithmetice-proportionalibus, niſi primus terminus ſit 0, aggregatum omnium non erit æquale ſemiſſi ul-

timi in numerum terminorum ducti.

Quod autem de his figuris oſtenſum eſt, intelligendum erit (mutatis mutandis) de quibuſvis aliis, nempe numerum terminorum (ſi ab o incipiatur) eſſe unitate majorem quam eſt numerus differentiarum, ſive particularum ex quibus maximus conſtat; (ſive æquales ſint illæ differentiæ ſive inæquales;)adeoq; ſi adſcriptæ figuræ (ſive ſit inſcripta ſive circũſcripta) baſis ſumatur æqualis baſi figuræ propoſitæ cui adſcribitur (ſive continuando inſcriptã uno gradu infra baſin, vel circumſcriptã uno gradu ſupra verticem) erit iſtius altitudo una parte major quam altitudo hujus, (ſive pars illa finita ſit ſive infinita;) ubi autem numerus partium altitudinis hujus ſupponitur ∞, erit in illa ∞ + 1; vel ſi hujus altitudo A, erit illius A + $\frac{1}{\infty}$ A, ſi illius A (quod nos ponere ſolemus) erit hujus A − $\frac{1}{\infty}$ A, quod tamen (in infinitis) tantundem valet ob differentiam infinite parvam.

Dum vero differentiam infinite parvam, pro nulla habendam dicimus: caute hoc accipiendum eſt; neq; enim id ubiq; obtinet, ſed aliquando lapſui occaſionem præbet. Cum enim infinite parvum infinities multiplicatur, aſſurgit nonnunquam quantitas ſatis magna, nempe illa ipſa cujus illa fuit aliquota pars utut infinite parva: Nam $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$ & $\frac{1}{\infty}$ A × ∞ = A.



Exem-

Exſemplum oſtendimus in Schol. prop. 13. Si enim (in fig. 1 & 2) concluderet quis, quoniam infinitorum parallelogrammorum latera (rectam VB conſtituentia) & trapeziorum latera (complentia rectam VS) ſigillatim ſumpta non niſi differentiâ infinitè parvâ ab invicem differant (cum tam hæc quam illa ſint infinite parva, quippe $\frac{1}{\infty}$ rectarum VB, VS,) eam igitur contemnendam eſſe, ipſaq; parallelogrammorum atq; trapeziorũ latera dicenda æqualia, & propterea (cum ex æqualium æqualibus additione aggregata ſint æqualia) infinita hæc infinitis illis æqualia, hoc eſt, totam VS, æqualem eſſe toti VB: manifeſtus eſſet paralogiſmus, (in quem tamen lapſus eſt admodum proclivis, ni caveatur:) Quamvis enim differentiæ ſint ſigillatim infinite-parvæ, (nempe $\frac{1}{\infty}$ VS — $\frac{1}{\infty}$ VB) omnium tamen (numero infinitorum) aggregatum ſat notabilem habet magnitudinem, nempe VS — VB.

At interim eadem parallelogramma atq; trapezia (ſi aream ſpectemus) non modo ſigillatim ſumpta differentiam habent infinitè parvam; ſed & eorum aggregatum & aggregatum horum (hoc eſt infinita illa parallelogramma ſimul ſumpta, atq; infinita hæc trapezia) differentiâ non niſi infinite parvâ ab invicem differunt: quod de ipſorum lateribus non obtinet.

Diſcriminis ratio hæc eſt: Quoniam ubi de lateribus eomparandis agitur, quamvis in binis quibuſlibet reſpective ſumptis differentia minor eſt quo major eſt omnium numerus, at in eadem ſemper ratione qua ſingulæ differentiæ minuuntur, differentiarum numerus augetur; adeoq; differentiarum aggregatum dividendo non minuitur. At ubi de areis agitur, non modo binorum (trapezii & parallelogrammi) reſpective ſumptorum differentiæ ſingulæ minuuntur ſed & omnium aggregatum; & quidem quo plures ſint differentiæ eò minus eſt omnium aggregatum, donec tandem non modo a ſingulis ſingula, (quod demonſtraſſe non ſufficeret) ſed & ab omnibus omnia differant ſpacio infinite-parvo, ut ex demonſtrationibus liquet. Atq; hæc aliquanto fuſius notaſſe operæ pretium duxi, quoniam hic loci nonnullos lapſui proclives animadverti.

Ne autem hinc aliquid periculi quis ſuſpicetur dum nos altitudinem figuræ cujuſlibet accuratam, atq; eandem aliquota ſui parte infinite-parva auctam, perinde habemus: hoc unum ſat ſecuros reddat, quod, cæteris paribus, auctio altitu-

dinis figuræ cujuslibet (sive planæ sive solidæ) non nisi in eadem ratione auget ipsius aream sive magnitudinem; adeoq; ubi altitudinis augmentum est non nisi aliquota sui parte infinite parva, erit etiam totius figuræ non nisi in eadem ratione auctio, hoc est aliquota parte sui infinite parva, sive $\frac{1}{\infty}$ totius figuræ; quod (cum non infinities, sed semel tantum sumatur) omni assignabili spacio minus erit, adeoq; pro nullo habendum.

Sin tandem quæratur, cur ego figurarum inscriptionem, potius quam circumscriptionem, eligerim; adeoq; ab 0 potius quam ab 1, ubiq; fere inchoaverim? præsertim cum figura circumscripta (non uno gradu supra verticem continuata, ut ab 0 incipiat, sed potius ab 1) eandem habeat præcise & basin & altitudinem cum ea cui adscribitur, sive in serie primanorum, sive secundanorum, aut aliorum sequentium; item sive finita sit sive infinita series?

Dicimus: Posse quidem id quod agimus utrovis modo fieri, nempe vel per figurarum inscriptionem vel circumscriptionem (quod & supra monuimus ad prop. 43. quæ toti huic Scholio ansam dedit, cujus quidem pars magna tradi citius non potuit, ut quæ a propositione proxime præcedente dependeat, (adeoq;, verbi gratia, series primanorum indifferenter designari, per 1, 2, 3, &c. vel per 0, 1, 2, &c. nam terminus primus 0 reliquorum quantitati nihil addit. Et quidem ego jam olim utroq; modo lemmata mea ordinaveram, ut ut alterutrum demonstrationibus nostris sufficeret, quapropter lectorem utroq; onerandum non censui; præsertim cum ego Series infinitas maxime spectabam, finitis vix aliter quam lemmatum instar ad infinitorum theoremata usus.

At interim figuræ circumscriptæ, si res accuratius perpendatur, non magis congruunt figuris illis quibus circumscribuntur, quam inscriptæ: Nam verbi gratia, inscripta cum exposita congruit altitudine & verticis latitudine, sed quoad basin (hoc est latitudinem in imo) differt; eadem inscripta uno infra basin gradu continuata (vel circumscripta sic continuata supra verticem) convenit expositæ quoad basin & verticis latitudinem sed quoad altitudinem differt; circumscripta vero (non continuata) convenit quidem expositæ quoad basin & altitudinem, sed non quoad latitudinem verticis, quippe in altera est 0 in altera 1.

Cum

Cum itaq; admodum ſe indifferenter habebant ad negotium noſtrum figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ; mallem ego ſeries noſtras ab 0 quam ab 1 inchoare: partim quod illud, utut inſcriptionem potius referre videatur, utriſq; tamen accommodari poſſit, (ut jam dictum eſt,) prout vel ſupra verticem vel infra baſin ſupponatur continuari: partim quod hoc pacto (propter minimi termini nullitatem) extremorum aggregatum idem ſit atq; terminus maximus: præſertim vero ut poſſim, ſine longo verborum ambitu, ſeriei primanorum appellatione comprehendere non modo 0,1,2,3, &c, ſed & 0, 2, 4, 6, &c, vel 0,3,6,9, &c, vel 0,4,8,12,&c, ſimileſq; alias ab 0 inchoatas quicunq; ſit terminus ſecundus; & ſub ſerie ſecundanorum nomine, non modo 0, 1,4,9, &c. ſed & 0, 2,8,18, &c, vel 0, 3, 12, 27, &c. ſimileſq;: & pariter in ſeriebus ſequentibus.

Siquis autem mallet ab 1, ſeries inchoare, poterit ad hunc modum lemmata ordinare.

Ad ſeriem primanorum;

$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2}{3+3} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3}{4+4+4} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4}{5+5+5+5} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4+5}{6+6+6+6+6} = \frac{1}{2}$

&c. $\qquad$ &c.

Aut etiam,

$\frac{0+1}{2+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+2}{2+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$\frac{0+1+2}{3+3+3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3}{3+3+3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$

$\frac{0+1+2+3}{4+4+4+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4}{4+4+4+4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$

$\frac{0+1+2+3+4}{5+5+5+5+5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{150}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{150}$

&c. $\qquad$ &c.

Ad seriem Secundanorum;

$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$ $\qquad$ $\frac{1+4}{9+9} = \frac{1}{2} - \frac{1}{18}$

$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{72}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9}{16+16+16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{48}$

$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{240}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9+16}{25+25+25+25} = \frac{1}{2} - \frac{1}{200}$

&c. $\qquad$ &c.

Aut etiam

$\frac{0+1}{4+4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+4}{4+4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$\frac{0+1+4}{9+9+9} = \frac{1}{2} - \frac{1}{18}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9}{9+9+9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$

$\frac{0+1+4+9}{16+16+16+16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9+16}{16+16+16+16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{32}$

$\frac{0+1+4+9+16}{25+25+25+25+25} = \frac{1}{2} - \frac{1}{50}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{50}$

&c. $\qquad$ &c.

Ad

Ad seriem Tertianorum.

$\frac{0+1}{1+1}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{8} = \frac{1}{27}+\frac{1}{8}$

$\frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+8}{27+27} = \frac{1}{27}+\frac{1}{27}$

$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{27}+\frac{1}{27}$ $\qquad$ $\frac{0+1+8+27}{64+64+64+64} = \frac{1}{64}+\frac{1}{64}$

$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} = \frac{1}{64}+\frac{1}{64}$ $\qquad$ $\frac{1+8+27+64}{125+125+125+125} = \frac{1}{125}+\frac{1}{125}$

&c. $\qquad$ &c.

Et similiter ad series sequentes, quibus recensendis abstineo ne sim prolixus. Poterit, si lubet, lector non magno negotio vel hæc ipsa lemmata in theoremata formare, vel alia his similia sequentibus seriebus aptare, si ad ea quæ jam tradidimus attenderit.

Sed & alius adhuc est (si varietate lector delectetur) series has ordinandi modus, qui etiam aliquando non minus erit accommodus: Si nempe nec ab 0 (ut in figuris inscriptis) nec ab 1 (ut in figuris circumscriptis) sed ab intermedia quantitate, puta $\frac{1}{2}$, series inchoetur, (adeoq; figuram representet quæ inscriptæ & circumscriptæ est intermedia, sive major quam inscripta & minor quam circumscripta.) Ut sit, verbi gratia, series primanorum $\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$ &c. vel (quod eodem recidit) $1+3+5+7$ &c. Quo casu lemma sic erit ordinandum, pro serie primanorum.

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}}{2+2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3}{4+4} = \frac{1}{2}$

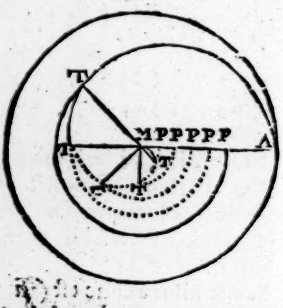
$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}{3+3+3} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5}{6+6+6} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}}{4+4+4+4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5+7}{8+8+8+8} = \frac{1}{2}$

&c. $\qquad$ &c.

Atq;

Atq; hic quidem modus omnium optime convenit prop. 15, 16, ubi figuram Spirali adjacentem cum Paraboli a comparamus. Nam ſi, in figura ſpirali, ductis quotlibet rectis MT angulos facientibus continuos invicem æquales, ſi in ſingulis ſpacies ſectores inſcribi ſupponantur, erunt eorum arcus, ut 0, 1, 2, 3, &c; ſin circumſcribi, ut 1, 2, 3, 4, &c; ſi vero ita abſcribi ut ſectorum arcus a ſpirali biſecentur, erunt ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c, vel ut 1, 3, 5, 7, &c. (nempe ut differentiæ numerorum quadraticorum:) adeoq; ſi arcus illi (ſive numero infiniti ſive finiti, quamvis ibidem de infinitis tantummodo verba facta ſint, adeoq; hanc curioſitatem illic omittendam duxerim,) ſupponantur in rectum extendi & invicem continuari, ut fiant totidem ſegmenta diametri parabolæ (continue poſita;) unde evadant diametri interceptæ 1, 4, 9, 16, &c. (nam $1+3=4$, $1+3+5=9$, &c;) quibus conveniant ordinatim-applicatæ (quippe in diametrorum ratione ſubduplicata) quæ erunt ad invicem, ut 1, 2, 3, 4, &c, hoc eſt ut ipſæ rectæ MT, MT, &c, in figura ſpirali vera per ſimilium ſectorum terminos tranſeuntes.



Atq; hoc pacto comparare licet, non modo figuram ex ſectoribus numero infinitis (quod nos illic fecimus) ſed etiam ex numero finitis conflatam, ſpirali adjacentem, cum figura ex totidem parallelogrammis adjacente parabolæ. Quod quidem (ſine nova figura) ſatis intelligi poterit. Si illi ſectorum arcus ponantur $1a, 3a, 5a$, &c; radii vero (ipſis proportionales) $2r, 6r, 10r$, &c; erunt ſectores $1ar$, $9ar$, $25ar$, &c. (nempe ſemiſſes parallelogrammorū radiis & arcubus reſpectivis contentorū.) Sumptis item in parabolæ diametro continuis ſegmentis $1a, 3a, 5a$, &c. adeoq; diametris interceptis $1a, 4a$, $(=1a+3a,)$ $9a$ $(=4a+5a)$ &c, & ordinatim-applicatis quæ illis diametris conveniant (in diametrorum ratione ſubduplicata) $2r, 4r, 6r$, &c, (quæ ſpacia abſcindant non æque alta, ſed quorum altitudines ſint arithmetice proportionales, ut 1, 3, 5, &c. ut patet;) parallelogramma ſpaciis illis inſcripta erunt $1a \times 0r$, $3a \times 2r$,

5a

$5a \times 4r$, &c, vel $0ar, 6ar, 20ar$, &c; circumſcripta, erunt $1a \times 2r$, $3a + 4r$, $5a \times 6r$, &c, vel $2ar, 12ar, 30ar$, &c; his autem intermedia partim inſcripta partim circumſcripta (quæ nempe eam habent latudinem quæ eſt arithmeticè media inter duas ordinatim applicatas ſpatium terminantes) vel (quod tantundem valebit) inſcripta trapezia, erunt $1a \times 1r$, $3a \times 3r$, $5a \times 5r$, &c, vel $1ar, 9ar, 25ar$, &c, expoſitis ſectoribus figillatim æqualia: iis nempe quorum arcus ſunt parallelogrammorum altitudinibus (hoc eſt, ſegmentis diametri parabolæ) æquales, radii vero latitudinum parallelogrammorum dupli: vel, ſi ſectorum radii ſint parallelogrammorum illorum latitudinibus æquales, erunt parallelogramma ſectorum dupla.

Sed tempus eſt ut prolixo Scholio finem imponam; quod, cur in hunc locum rejecerim, ſupra dictum eſt.

PROP. CLXXXIII. *Theorema.*

LAtus numeri Figurati cujuſlibet, in qualibet ſerie Tabellæ expoſitæ (prop. 132.) quouſq; libet continuandæ; ad ſuum illum numerum Figuratum; rationem habet cognitam.

Nempe eam quam indicat prop. præced.

PROP. CLXXXIV. *Theorema.*

ET *propterea*, Series ſequentes in præmiſſa tabella quouſq; libet continuata, non erit difficile interpolare.

Nempe, invento per prop. 182, cujuſq; proprio charactere, fiat interpolatio ut in prop. 175, 176, 181.

Tabella vero, ut dictum est, interpolata sic se exhibebit.

Numeri

0	Monadici	Laterales.	Triangulares	Pyramidales	Triangulipyram.
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	2	3	4	5
4	1	3	6	10	15
5	1	4	10	20	35
6	1	5	15	35	126

Monadici. 1

Laterales. 1

Triangulares. 1

Pyramidales. 1

Trian: pyram. 1

$\frac{l^3+l}{2}$

$\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$

$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$

Val

Vel aliter expeditus. Poſtquam per prop. 170, 175, &c. interpolatio ſerierum tam tranſverſarum quam erectarum aliquouſq; incepta eſt, licet eam ulterius continuare quouſq; libet ſola additione numerorum jam inventorum; nam non modo numeri tabellæ prop. 132. (prout ibidem monuimus) ſed & qui interpolatione immiſcentur, fiunt ex duobus aliis additis, altero ſuperius altero ad ſiniſtram, (non quidem proximis, ut in prop. 132. ſed, propter loca jam interpolata,) poſt unum locum interjectum poſitis. Ut animadvertenti patebit.

Quod autem de interpolatione unius in ſingulis ſpaciis loci, in propoſitionibus aliquot præcedentibus jam dictum eſt, etiam ad duorum vel trium pluriumve interpoſitionem, mutatis mutandis, facile accommodari poterunt.

SCHOLIUM.

Notandum hic, totum hoc interpolationis negotium, huc uſq; præſtitum, perfici poſſe (etiam ſine inventis cujuſq; ſeriei propriis characteribus) ope monitorum quæ habentur in Scholiis prop. 126. & 154. Interpolatis nempe primo ſeriebus erectis, & iſtis deinde interpolationibus in ſeries item tranſverſas relatis. Verum cum ſingularum ſerierum characteres inveſtigare, res eſſet non injucunda, & lectori forſan non ingrata: placuit ea potius quam habetis methodo incedere.

Cum autem huc perventum eſt, patet, intercalatione facta in ſingulis ſeriebus tam erectis quam tranſverſis Tabellæ prop. 132. novas jam emerſiſſe ſeries ipſis interpoſitas: nondum tamen completas, ſed hiantes. Et quidem locus ille (nota □ inſignitus) quem quam maxime ſuppletum vellem, manet adhuc vacuus. Si autem vel unus ex vacuis illis locis ſuppleri datum ſit, & reliqui non difficulter ſuppleri poterunt; ut ex prop. 188. deinceps patebit.

Cum vero Tabella prop. 132. jam habetur novis ſeriebus interpolata, ut interjectæ ſeries ſuos habeant titulos juxta tenorem illius tabellæ accommodatos, obſervanda eſt hæc ſequens Propoſitio.

PROP. CLXXXV. *Theorema.*

SI ſeriebus Tabellæ prop. 132. novæ interſerantur ſeries, ut ſuum quæq; debitum ſortiatur titulum; obſervandi ſunt indices poteſtatum illic appoſitarum; eæq; poteſtates ſunt interponendæ quarum indices cum illarum indicibus debitam analogiam retinent.

Puta, cum poteſtates, in ſummitate Tabellæ iſtius, repertæ indices habeant, 0, 1, 2, 3, 4 &c. interpolatione unius loci ubivis jam facta, poteſtatum apponendarum indices erunt $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4$. &c.

Item cum poteſtatum illic ad marginem appoſitarum indices ſint $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. ſeu $\frac{2}{0}, \frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}$, &c. poteſtatum jam appoſitarum indices erunt $-\frac{2}{1}, \frac{2}{0}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}$, &c. (vel pro $-\frac{2}{1}$, ſubſtituas, $-\frac{1}{1}$, vel $-\frac{4}{2}$, vel -2, tantundem enim valent.)

Adeoq; Tabella illa jam interpolata ſic ſe habebit.

Si infinita ſeries Æqualium mulctetur analoga ſerie Primanorum, vel Secundanorum, aut Tertianorum, &c. Reſidua, eorumq; Quadrata, Cubi, &c. eam rationem habebunt ad Æqualium ſeriem congruam, quam habet unitas ad numeros Tabellæ ſequentis. Nempe

Seriei

Seriei æqualium multatæ serie

	Recipr. √q Resid.	Æqualia.	√q Residuorum	Residua	√q. Cuborum.	Quadrata.	√q. Quintan.	Cubi.	√q. Septiman.	Biquadrata.
Recipr: Quadrat.	8	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{64}$		$\frac{1}{128}$
Nullâ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Quadratorum.		1	□	$\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{64}$		$2\frac{177}{128}$
Primanorum.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
Quadr. Subtert.		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{8}$		$6\frac{27}{64}$		$9\frac{9}{128}$
Subsecundanor.	$\frac{1}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{1}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{1}{8}$	15
Qu: Subquintan.		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{64}$		$23\frac{177}{128}$
Subtertianorum.	$\frac{1}{64}$	1	$2\frac{9}{64}$	4	$6\frac{27}{64}$	10	$14\frac{21}{64}$	20	$26\frac{19}{64}$	35
Q: Subseptiman.		1		$4\frac{1}{8}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{19}{64}$		$50\frac{105}{128}$
Subquartanor.	$\frac{1}{128}$	1	$2\frac{177}{128}$	5	$9\frac{9}{128}$	15	$23\frac{177}{128}$	35	$50\frac{105}{128}$	70

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHOLIA.

Atq; hic jam notare licet alteram etiam seriem earum quarum in Scholiis prop. 165 & 168. nempe eam quam prop 118 & 121 prius tradideram, etiam in hâc ipsa Tabella inexspectatò prodire: in serie nempe transversa tertia.

PROP. CLXXXVI. *Theorema.*

HInc patet, *quod* Series infinita radicum universalium, ad seriem totidem Æqualium, rationem habere potest satis explicabilem.

Nempe per Tabellam prop. præced. erit.

$\sqrt{q}$ Resid.	Residua	$\sqrt{q}$ Cuborum.
$\sqrt{u}:\sqrt{R}-\sqrt{a}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{a}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2}a+3\sqrt{R}a^2-\sqrt{a^3}:$
$\sqrt{u}:\sqrt{R}-\sqrt{b}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{b}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2}b+3\sqrt{R}b^2-\sqrt{b^3}:$
$\sqrt{u}:\sqrt{R}-\sqrt{c}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{c}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2}c+3\sqrt{R}c^2-\sqrt{e^3}:$
&c. ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{}:\sqrt{R}-\sqrt{R}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{R}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^3}+3\sqrt{R^3}-\sqrt{R^3}:$
$\frac{2}{1\,5}$ A $\sqrt{qq}$R	$\frac{1}{1}$ A $\sqrt{}$R	$\frac{2}{1\,5}$ A $\sqrt{q}\,q\,R^2$.

$\sqrt{q}$ Residuorum.	Residua	$\sqrt{q}$. Cuborum.
$\sqrt{u}:\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}a$	$\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}a$	$\sqrt{u}:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2a+3\sqrt{^3}Ra^2-\sqrt{^3}a^3:$
$\sqrt{u}:\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}b:$	$\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}b$	$\sqrt{u}:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2b+3\sqrt{^3}Rb^2-\sqrt{^3}b^3:$
$\sqrt{u}:\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}c:$	$\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}c$	$\sqrt{u}:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2c+3\sqrt{^3}Rc^2-\sqrt{^3}c^3:$
&c ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{u}:\sqrt{^2}R-\sqrt{^3}R^2$	$\sqrt{^2}R-\sqrt{^3}R$	$\sqrt{u}:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2R+3\sqrt{^3}RR^2+\sqrt{^3}R^3:$
$\frac{4\,8}{1\,8\,5}$ A $\sqrt{^6}$R	$\frac{1}{6}$ A $\sqrt{^3}$R	$\frac{4\,8}{1\,8\,5}$ A $\sqrt{^6}$ R $^3=\frac{4\,8}{1\,8\,5}$ A $\sqrt{}$R
vel $\frac{16}{25}$ A $\sqrt{^6}$R		$\frac{16}{25}$ A $\sqrt{^6}$ R $^2=\frac{16}{25}$ A $\sqrt{}$R

Et pari modo in quibuſvis aliis iſtius Tabellæ ſeriebus in quibus interpolatio perfecta eſt.

Adeoq; nihil deeſt ad idem in reliquis ſeriebus perficiendum (& ſpeciatim ad quadrandum circulum) niſi ut methodus ſupplendi loca vacua reperiatur, vel (quod eodem recidit) ut ſerierum iſtarum proprius character inveniatur. Et quidem quamvis non obvium ſit interpoſitarum ſerierum characteres invenire, tamen, quam habent illi ad invicem rationem, ex prop. ſeq. innoteſcet: ut ſiqua poſſimus arte eorum unum invenire, ſtatim invenientur & reliqui.

PROP.

PROP. CLXXXVII. *Theorema.*

IN Tabella prop. 184. Ut, posito seriei secundæ, hoc est, parium primæ, charactere 1, reliquarum ex paribus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4}$ &c. (ut dictum est prop. 178.) vel (quod tantundem valet) $1 \times \frac{2l}{2} \times \frac{2l+2}{4} \times \frac{2l+4}{6} \times \frac{2l+6}{8}$ &c. sic, posito seriei primæ (imparium) charactere A, reliquarum ex imparibus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $A \times \frac{2l-1}{1} \times \frac{2l+1}{3} \times \frac{2l+3}{5} \times \frac{2l+5}{7}$ &c. Adeoq; ex horum uno cognito innotescent statim & reliqui.

Nam id postulat analogia progressionis Arithmeticæ, quæ & in Numeratoribus & in Denominatoribus conspicitur. Atq; id ipsum comprobat inductio locorum omnium qui complentur; ut non sit dubium quin & idem de vacuis credendum sit.

Adeoq; ex imparium characteribus, uno cognito innotescent etiam & reliqui.

PROP. CLXXXVIII. *Theorema.*

IN singulis seriebus Tabellæ prop. 184. Si primus terminus dicatur A, secundus (hoc est, primus parium,) 1. Reliqui omnes ejusdem seriei (tam pares quam impares) fiunt continua multiplicatione numerorum sequentium. Nempe

Impares

Impares.	Pares.
In prima $A \times \frac{0\times 2\times 4\times 6\times 8\ \&c.}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$	$1 \times \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c}$
In secund. $A \times \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$	$1 \times \frac{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c}$
In tertia $A \times \frac{2\times 4\times 6\times 8\ 10\ \&c.}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$	$1 \times \frac{3\times 5\times 7\times 9\times 11\ \&c}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c}$
In quarta $A \times \frac{3\times 5\times 7\times 9\times 11\ \&c.}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$	$1 \times \frac{4\times 6\times 8\times 10\times 12\ \&c}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c}$
In quinta $A \times \frac{4\times 6\times 8\times 10\times 12.\&c}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$	$1 \times \frac{5\times 7\times 9\times 11\times 13\ \&c.}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c.}$
In sexta $A \times \frac{5\times 7\times 9\times 11\times 13\ \&c.}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$	$1 \times \frac{6\times 8\times 10\times 12\times 14\ \&c.}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c.}$
In septim. $A \times \frac{6\times 8\times 10\times 12\times 14\ \&c}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c}$	$1 \times \frac{7\times 9\times 11\times 13\times 15\ \&c.}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c.}$
In octava $A \times \frac{7\times 9\times 11\times 13\times 15\ \&c}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$	$1 \times \frac{8\times 10\times 12\times 14\times 16\ \&c.}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\ \&c.}$

Et sic deinceps.

Probabitur hæc ex præcedente. Vel etiam (ut præcedens) ex analogia progressionis Arithmeticæ. Et quidem inductione comprobatur in locis omnibus repletis; ut non sit dubium quin idem de vacuis etiam credendum sit.

Si quis autem hæsitat de imparibus seriei primæ, (quos aio fieri ex continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{0\times 2\times 4\times 6\times 8\ \&c}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\ \&c.}$) nempe, ne 0 ciphra quæ istic conspicitur, totam continuam multiplicationem, quantacunq; fuerit, penitus destruat, faciatq; omnes istius seriei terminos evanescere in 0 ciphram seu Nihil: Sciendum est, inde huic malo cautum esse quod terminus A in ista serie sit ∞ Infinitum (prout superius ostendimus in Scholiis ad prop. 166.) adeoq; nisi sequeretur 0 (ad ipsius ∞ vires minuendas) excrevissent omnes istius seriei termini in ∞ Infinitum. Sed eorum alterum alterius malo medetur commode. Quamvis enim $\infty \times 0$ non aliquem

quem determinate numerum designet (et propterea nihil inde certi de reliquis quantitatibus concludi possit,) potest tamen quasi virtualiter cujusvis numeri vices subire. Nam quicunq; numerus per ∞ dividatur, quotientem dabit 0, et contra. Puta ∞)1(0.0)1(∞.∞)2(0.0)2(∞.∞)3(0.0)3(∞. Et sic de quovis alio: Et propterea (cum *Divisor* in *Quotientem* ductus restituere debeat numerum *Dividendum*) esset ∞ × 0 = 1, vel ∞ × 0 = 2, vel ∞ × 0 = 3; Et sic de quovis alio numero.

PROP. CLXXXIX. *Theorema.*

Hinc sequitur, quod Si ex Tabellæ prop. 184. locis vacuis unus quilibet numero noto suppleatur, erunt & reliqui omnes cogniti.

Verbi gratiâ, si numerus hâc notâ □ designatus supponatur cognitus, reliqui omnes etiam cognoscentur; qui nempe eam habent ad illum rationem quæ hic subtus indigitatur.

∞	1	1/□	1/1	1/□	1/0	0/□	1/0	2/□	1/0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1/□	1	□	1/1	0/□	1/0	0/□	1/0	0/□	1/0
1/1	1	1/1	2	1/1	3	1/1	4	1/1	5
1/□	1	0/□	1/1	0/□	1/1	0/□	1/0	0/□	1/0
1/0	1	1/0	3	1/0	6	1/0	10	1/0	15
0/□	1	1/0	1/1	0/□	1/0	0/□	1/0	0/□	1/0
2/□	1	1/0	1/1	1/0	1/0	0/□	1/0	0/□	1/0
1/0	1	1/0	4	1/0	10	1/0	20	1/0	35
2/□	1	0/□	1/1	0/□	1/0	0/□	1/0	0/□	1/0
1/0	1	1/0	5	1/0	15	1/0	35	1/0	70

Totus proceſſus demonſtratur ex prop. præced.

Notandum autem & hic numerum quemvis intermedium aggregatum eſſe ex duobus altero ſurſum altero ad dextram (non proximis, ſed poſt unum intermiſſum,) poſitis.

Cujuſq; ſeriei characterem (quatenus per prop. 181 innoteſcit,) libuit etiam adjungere, quo melius perſpiciat lector quouſq; rem perduximus.

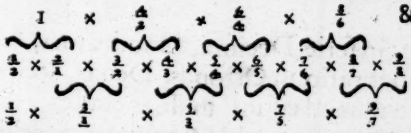
SCHOLIUM.

Atq; hactenus quidem rem perduxiſſe videamur ſatis feliciter. Verum hic tandem hæret aqua. Neq; enim video quo pacto poſſim vel quantitatem □ reperire, vel characterem ſeriei A. (Et propterea, nec characteres ſerierum imparium penitus aſſequi, licet eorum ad invicem rationes cognoſcantur; nec imparium ſerierum locos impares, quamvis & horum etiam cognoſcantur quas habent ad invicem rationes.) Quanquam enim ſi numeri laterales ſint integri, puta 1, 2, 3, 4, &c. nota erit quantitas A, puta 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. non tamen facile eſt deprehendere quo pacto horum numerorum ad ſuos reſpective numeros laterales ratio poſſit unâ aliqua æquatione explicari: unde & reliquis lateribus (locorum imparium) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$ &c. accommodari poſſit ſua quantitas A. quanquam enim hinc ſpes non exigua viſa eſt affulſiſſe, lubricus tamen quem præ manibus habemus Proteus tam hic quam ſuperius non raro elapſus, ſpem fefellit. Quem autem & hic comprimenti vultum oſtenderit, non erit fortaſſis ingratum appoſuiſſe. Nempe ----

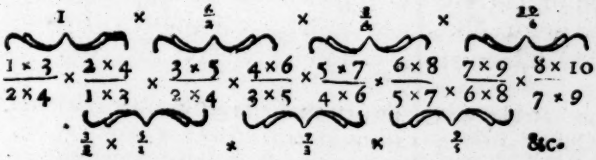
PROP. CLXXXX. *Theorema.*

IN ſerie quarta, (ſive parium ſecunda,) cujus numeri alternè ſumpti (in locis paribus) 1, 2, 3, 4, 5, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum ſeu rationum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4}$, &c. ſeu $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{6}$ &c; & (in locis imparibus,) $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, &c. ex multiplicatis $\frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7}$, &c. Si, propter intercalationem unius in ſingulis ſpaciis numeri, (ut ex locis tam paribus quam imparibus intermiſtis una fiat ſeries,) quælibet rationum, in quas continue multiplicatur terminus tam parium

parium quam imparium primus, in binas dirimenda eſt, (nam, verbi gratia, ratio 1 ad 2 compoſita eſt ex ratione 1 ad 1 $\frac{1}{2}$ ad 1 $\frac{1}{2}$ ad 2,) hoc modo

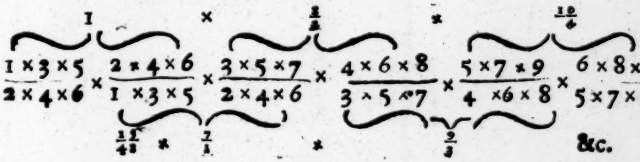


In ſerie ſexta, (ſive, parium tertia,) ſi idem faciendum ſit; diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraq; eſt ex duabus compoſita; ad hunc modum.



Nempe, diviſa prius quâlibet ratione in quaternas, (puta $\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$, et $\frac{7}{3} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$, Et ſic in cæteris) & tum diſtributione alternatim facta in binas claſſes.

In ſerie Octava (ſive parium quarta) diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraq; eſt ex ternis compoſita, ſic.



Nempe, diviſa prius qualibet ratione in ſenas, (puta

$\frac{8}{3} =$

$\frac{1}{A} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$, & $\frac{2}{I} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$, &c.)

quæ postea distribuenda sunt alternatim in duas classes.

Et similiter in serie Decima, Duodecima, &c. dividenda quælibet ratio in Octonas, Denas, &c. quæ alternatim distribuendæ sunt in duas classes.

(In serie autem Secunda (sive parium Prima) nulla rationum divisione opus est, sed cum omnes sint eadem æqualitatis ratio, sive $\frac{1}{1}$; eadem illa est & ubiq; interponenda, nam $\frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$.)

Verum si in seriebus Imparibus illud aggrediamur; nempe ut quælibet ratio in duas (æquabiliter progrediendo) distribuatur; res non ita feliciter succedit.

Nam (verbi gratia) cum (ex analogia reliquarum) rationes seriei Quintæ dividendæ essent in ternas, Septimæ in quinas, &c. (numero semper impares,) non potest fieri ista æquabilis earum distributio in duas classes quæ ad debitam interpolationem requiritur.

Tota propositio (inspecta Tabella) satis per se patet animadvertenti.

Res aliquanto clarius fortasse patebit ubi serierum aliquot rationes in binas, ternas, quaternas, &c. (prout series quælibet postulat) divisero. Nempe

In serie tertia.		In serie quarta.	
$\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$	$\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$	$\frac{1}{1} = \frac{2 \times 3}{1 \times 2}$	
$\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$	$\frac{4}{2} = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 3}$	$\frac{3}{3} = \frac{4 \times 5}{3 \times 4}$
$\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$\frac{6}{3} = \frac{6}{5}$	$\frac{6}{4} = \frac{5 \times 6}{4 \times 5}$	$\frac{5}{5} = \frac{6 \times 7}{5 \times 6}$
$\frac{4}{6} = \frac{2}{6}$	$\frac{8}{4} = \frac{8}{7}$	$\frac{8}{6} = \frac{7 \times 8}{6 \times 7}$	$\frac{7}{7} = \frac{8 \times 9}{7 \times 8}$
$\frac{5}{8} = \frac{2}{8}$		$\frac{10}{8} = \frac{9 \times 10}{8 \times 9}$	

In

In serie quinta.

$\frac{1}{1} = \frac{3\times4\times5}{2\times3\times4}$ $\frac{4}{1} = \frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}$

$\frac{2}{2} = \frac{5\times6\times7}{4\times5\times6}$ $\frac{6}{2} = \frac{4\times5\times6}{3\times4\times5}$

$\frac{3}{3} = \frac{7\times8\times9}{6\times7\times8}$ $\frac{8}{3} = \frac{6\times7\times8}{5\times6\times7}$

$\frac{11}{4} = \frac{9\times10\times11}{8\times9\times40}$ $\frac{10}{4} = \frac{8\times9\,10}{7\times8\times9}$

In serie sexta.

$\frac{6}{1} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$ $\frac{1}{1} = \frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}$

$\frac{8}{2} = \frac{5\times6\times7\times8}{4\times5\times6\times7}$ $\frac{7}{2} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$

$\frac{10}{3} = 7\times8\times9\times10$ $\frac{9}{3} = \frac{6\times7\times8\times9}{5\times6\times7\times8}$

$\frac{12}{4} = 6\times7\times8\times9$ $\frac{11}{4} = \frac{8\times9\times10\times11}{7\times8\times9\times10}$

$\frac{14}{5} = \frac{9\times10\times11\times12}{8\times9\times10\times11}$

In serie septima.

$\frac{7}{1} = \frac{3\times4\times5\times6\times7}{2\times3\times4\times5\times6}$ $\frac{1}{1} = \frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}$

$\frac{9}{2} = \frac{5\times6\times7\times8\times9}{4\times5\times6\times7\times8}$ $\frac{8}{2} = \frac{4\times5\times6\times7\times8}{3\times4\times5\times6\times7}$

$\frac{11}{3} = \frac{7\times8\times9\times10\times11}{6\times7\times8\times9\times10}$ $\frac{10}{3} = \frac{6\times7\times8\times9\times10}{5\times6\times7\times8\times9}$

$\frac{13}{4} = \frac{9\times10\times11\times12\times13}{8\times9\times10\times11\times12}$ $\frac{12}{4} = \frac{8\times9\times10\times11\times12}{7\times8\times9\times10\times11}$

In seriebus hisce (quantumlibet continuatis) et sequentibus omnibus, notandum est, Rationes cujuslibet ex paribus seriei dividi in alias numero pares, quæ propterea commode distribui possunt (ut dictum est) in duas Classes: cujuslibet autem ex seriebus imparibus, rationes dividi in alias numero impares, quæ propterea hic distribui non possunt.

SCHOLIUM.

Si quis autem putet huic malo medelam satis commode applicari posse, dividendo rationes seriei quintæ, septimæ, &c. (non in ternas, quinas, &c. sed) in senas, denas, &c. (nempe bis ternas, bis quinas, &c.) ut ita rationes (jam numero pares) distribui possint in binas classes: Res neutiquam ex voto succederet. Nam hoc quidem tantundem est acsi Rationes seriei quartæ, sextæ, octavæ, &c, dividantur (non in binas, quaternas, senas, &c, sed) in quaternas, octonas, duodenas, &c. Et harum postea fiat alternatim distributio in duas classes. Quod quidem

ſi fieret, non ipſæ prodirent rationes quæſitæ, (quas ſupra exhibuimus,) ſed aliæ ab ipſis ſatis diverſæ, ut experienti patebit.

Et quidem proclivis ſum ut credam (quod et ab initio ſuſpicatus ſum,) rationem illam quam quærimus talem eſſe quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera ſurda; (quale quid innuit Schotenius, de radicibus Æquationum quarundam cubicarum, in ipſius *Appendice* ad tractatum *de Organica Conicarum Sectionum deſcriptione*, idq; ad mentem Vietæi, Carteſii, & aliorum:) ut neceſſe videatur alium ejuſmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per latera ſurda.

Atq; hæc quidem noſtra ſive ſententia, ſive conjectura hinc confirmari videtur; Quoniam, ſi, ut ſerierum parium quælibet (in Tabella prop. 184) ſuum habet appoſitum characterem, ita & imparium quælibet ejuſmodi characterem nacta eſſet: tum, ut per characteres parium, rationem inveſtigari docuimus quam habet ſeries finita Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo Æqualium, (in Scholiis ad prop. 182) ita per ejuſmodi characteres ſerierum imparium, ſimiliter inveſtiganda videretur ratio quam habet finita ſeries Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. ad ſeriem totidem horum maximo Æqualium: cur autem hoc non ſperandum ſit, oſtendimus in Scholiis ad prop. 165.

Et propterea quod in aliis Arithmetices negotiis fieri ſolet; illud & hic faciendum erit: nempe, ubi ad *ἄτοπον* aliquid pervenitur, quod quidem fieri ſupponendum eſt, nec tamen actu fieri poteſt; excogitant modum aliquem exprimendi id quod fieri ſupponitur utut factum non ſit.

Atq; hoc quidem in Arithmeticis operationibus omnibus reſolutoriis uſu venit. v. g. In ſubductione; ſi proponitur numerus major ex minori auferendus, puta 3 ex 2, vel 2 ex 1; quoniam id actu præſtari non poteſt, excogitantur numeri negativi quibus exprimatur ejuſmodi ſuppoſititia ſubductio, puta, $2 - 3$, vel $1 - 2$, vel -1.

In diviſione; ſi proponatur numerus per alium dividendus qui ipſum non metitur, puta 3 per 2; cum hoc actu præſtari non

non poſſit, inventus eſt modus ejuſmodi ſuppoſititiam diviſionem indicandi ad hanc formam $\frac{1}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$.

In extractione Radicum; ſi proponatur numerus reſolvendus qui non ſit ſui generis vere figuratus; verbi gratia, ſi quæratur radix quadratica numeri 12, quoniam radix illa non poteſt ullis numeris ſive integris ſive fractis exponi, ideo inventa eſt methodus ejuſmodi Radicem ſuppoſititiam utcunq; indicandi ad hanc formam, $\sqrt{12}$, vel $2\sqrt{3}$.

Pariter, in Progreſſione Geometrica, puta 3, 6, 12, &c. Si quæratur terminus novus inter 3 & 6 interponendus, dicetur ille $3\sqrt{2}$ vel $\sqrt{18}$ vel $\sqrt{:3\times6:}$ vel forte (quod tantundem valet) $\sqrt{:2\times9:}$ quod idem eſt atq; explicatius dicere, *terminus medius inter* 3 *&* 6 *in progreſſione* 3,6,12, &c. aut *inter* 2 *&* 9 *in progreſſione* 2, 9, $40\frac{1}{2}$ &c. Ita ſi inter 3, 6, interponendi eſſent duo medii Geometrici, eſſet eorum prior $\sqrt{c:3\times3\times6:}$ vel $\sqrt{c}$ 54 vel potius $3\sqrt{c}$ 2, (nempe 3 ducti in radicem cubicam communis rationis 2) et ſic in cæteris.

Si autem Progreſſio Geometrica, quæ ſupponitur fieri ex continua multiplicatione primi termini in numeros quotlibet invicem æquales, (puta 3,6,12,24, &c.) ex continua multiplicatione $3\times2\times2$ &c.) non ſemper admittat terminos intermedios rationales: non mirandum eſt ſi neq; illud contingat in progreſſione facta ex termini primi continua multiplicatione in quotlibet ſuccedentes numeros inæquales, ſive creſcentes ſive decreſcentes; (puta 1,2,6,24, &c. ex continuè multiplicatis $1\times2\times3\times4$ &c; vel $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$, &c. ex continuè multiplicatis $1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}$, &c.

Quoties autem hoc contingit, cum illud veris numeris deſignari non poſſit (& ne quidem ſolis radicibus ſurdis) quærendus erit modus aliquis id ipſum utcunq; exprimendi. Si igitur ut $\sqrt{:3\times6:}$ ſignificat *terminum medium inter* 3 *&* 6 *in progreſſione Geometrica æquabili* 3,6.12,&c. (continue multiplicando $3\times2\times2$ &c.) ita $m^{\sim}:1\rfloor\frac{1}{2}:$ ſignificet *terminum medium inter* 1 *&* $\frac{1}{2}$ *in progreſſione Geometrica decreſcente* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, &c. (continue multiplicando $1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ &c.) erit $\square = m^{\sim}:1\rfloor\frac{1}{2}:$ Et propterea *circulus eſt ad quadratum diametri, ut* 1 *ad* $m^{\sim}:1\rfloor\frac{1}{2}:$ Quæ quidem erit vera circuli quadratura in numeris, quatenus ipſa numerorum natura patitur, explicata.

Et quidem, ſicut in progreſſione Geometrica æquabili, 3, 12, 48,

48, &c. quanquam qui terminum inter 3 & 12 intermedium dicit $\sqrt{:}\ 3 \bowtie 12$: non dicendus erit rem satis explicasse, quoniam terminus ille explicatius dici possit 6 (est enim $\sqrt{:}\ 3 \bowtie 12 :: = \sqrt{36} = 6$:) attamen qui inter 3 & 6 (in progressione 3,6, 12, &c.) terminum assignat intermedium $\sqrt{:}\ 3 \bowtie 6$: (vel saltem $\sqrt{18}$, aut $3\sqrt{2}$,) rem satis explicasse dicendus erit, quoniam non potest in vero numero assignari: Ita qui in progressione $1, \frac{1}{4}, \frac{241}{1446}$, &c, terminum inter 1 et $\frac{1}{3}$ intermedium dicit $m^{\sim} : 1 \rfloor \frac{1}{3}$: non satis explicate rem tradit, dicere enim potuisset $\frac{1}{4}$; At qui inter 1 et $\frac{1}{2}$ medium terminum assignat $m^{\sim} : 1 \rfloor \frac{1}{2}$: satis rem expllcasse dicendus est, cum iste terminus non possit veris numeris exprimi: adeoq; sufficit si utcunq; indicetur.

Atq; insuper, ut $\sqrt{:}\ 3 \bowtie 6 ::$ (in progressione 3,6,12, &c.) vel $\sqrt{18}$, vel $3\sqrt{2}$, quamvis veris numeris explicari non potest accurate, potest tamen quam proxime designari; (puta major quam $4\overline{|24}$, minor tamen quam $4\overline{|25}$; item major quam $4\overline{|2426}$, minor quam $4\overline{|2427}$; item major quam $4\overline{|242639}$, minor quam $4\overline{|242640}$; et sic deinceps) ita et numerus $\square = m^{\sim} : 1 \rfloor \frac{1}{2}$: designari potest veris numeris quam proxime, licet non accurate; puta major quam $1\overline{|27}$, minor tamen quam $1\overline{|28}$; item major quam $1\overline{|2732}$, et minor quam $1\overline{|2733}$; item major quam $1\overline{|273239}$, et minor quam $1\overline{|273240}$; et sic deinceps, prout vel ex tabella nostra (quod sequente propositione ostensurus sum) vel etiam aliunde variis modis colligi potest.

Adeo ut nihil videam cur non ratio circuli ad quadratum circumscriptum (vel etiam Ellipseos ad circumscriptum parallelogrammum) nempe ut 1 ad $\square = m^{\sim} : 1 \rfloor \frac{1}{2}$: vel $\square = 1\ m^{\sim}\frac{1}{2}$. (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et $\frac{1}{4}$ in progressione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ &c,) æque τεχνικῶς explicari dicenda sit, atq; ratio lateris ad diagonium in quadrato, nempe ut 1 ad $1\sqrt{2}$ vel ad $\sqrt{:}\ 1 \bowtie 2$: (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et 2 in progressione 1,2,4, &c.) nisi quod hæc notatio $\sqrt{2}$ vel $\sqrt{:}\ 1 \bowtie 2$: jamdiu fuerit recepta (sed quæ aliquando fuit nova;) nostra vero jam primitus introducta, propter novum progressionis genus jam primum (quod sciam) detectum. Sicut autem notatio numeri surdi (puta $\sqrt{2}$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, subducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera surda; ita non erit difficile ejusmodi

modi operationes ad novum hunc noſtrum notationis modum applicare; quod tamen præſentis inſtituti non eſt. Non ignoro interim ad hanc ipſam notationem accuratius perficiendam, apponendas eſſe notæ $m\sim$ diſtinctiones ſuas, puta $m\sim^{2}$, $m\sim^{3}$, $m\sim^{\pm}$, &c, prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c; ſicut & notæ $\surd$ fieri ſolet, puta $\surd^{2}$, $\surd^{3}$, $\surd^{\pm}$, &c, prout deſignat radicem quadraticam, vel cubicam, biquadraticam, &c, hoc eſt, vel unicum, vel primum duorum, trium, &c. mediorum proportionalium: Item alias apponendas eſſe diſtinctiones quæ indicent, an continui multiplicationes (in expoſita ſerie interpolanda) vel unitate, vel numero binario, ternario, &c. continue creſcant. Verum ea omnia, & ſiqua ſunt ſimilia, remittenda ſunt ad accuratiorem hujuſce progreſſionis diſquiſitionem ſi illam in Arithmeticam admittendam ſentiant Mathematici, (quod quo minus fiat nihil video.) Præſenti ſufficit inſtituto illud quod volumus utcunq; indicare, & quod in charactere deficit apertis verbis ſupplere. Si autem notationis modus ille a nobis excogitatus Mathematicis minus placuerit; ego quam lubentiſſime illum mutari patiar modo aptiorem oſtendant.

Ut ut ſit: Ego quidem neceſſe habeo ut fatear, me nec ejuſmodi pro ſericbus imparibus quales pro paribus in Tabella, characteres; nec ſerierum imparium locos impares, adhuc ſupplere poſſe, juxta aliquem (quem adhuc receptum ſcio) notationis modum; (quanquam eorum ad invicem rationes jam oſtenderim.) Et quanquam in ſuperioribus, per avia non raro, et tramites nulli quod ſciam antea calcatas perrumpens, inſperatos exitus aliquoties invenerim: vix tamen (ob cauſas jam expoſitas) auſim ſperare, & hic item ex voto omnia ſucceſſura. Si forſan alius aliquis noſtra dehinc premens veſtigia eo tandem perveniat quo mihi non datum eſt pervenire, (nollem enim pro noſtri modulo aliorum item omnium ingeniis terminos indicere,) & modos magis accommodos eidem quantitati exprimendæ invenerit, ego neutiquam gravatim feram. Mathematicis interim haud ingratum fore autumo me novam aliquam nec (ſi quid ego judico) prorſus contemnendam, obſcuro ſatis de circuli quadratura problemati, lucem præbuiſſe; eamq; eatenus numeris explicaſſe quatenus ipſa numerorum natura ferat.

Quod autem jam invenimus, libet etiam, in sequentibus aliquot propositionibus, mutata aliquantulum forma proponere. Et primo quidem qui id possit numeris absolutis quam proxime designari, & deinde etiam lineis rectis.

PROP. CLXXXXI. *Problema.*

PRopositum sit inquirere, quantus sit terminus □ (tabellæ prop. 189.) in numeris absolutis quam proxime.

Quo facilius res succedat, progressionis (ibidem repertæ)

termini $\frac{1}{2}\square$. $1\square$. $\frac{2}{3}\square$. $\frac{4}{5}\square$. $\frac{3\times5}{2\times4}\cdot\frac{4\times6}{3\times5}\square$. $\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}$. &c.

dicantur, α. a. β. b. γ. c. δ. d. &c.

Est autem $1.2::\alpha.\beta$. Et $2.3::a.b$. Et $3.4::\beta.\gamma$. Et $4.5::b.c$. Et $5.6::\gamma.\delta$. Et $6.7::c.d$. &c.

Hoc est, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}$, $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$, $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}$, $\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$, $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{6}{5}$, $\frac{d}{c}=\frac{7}{6}$, &c.

Ideoq; (cum rationes continue multiplicantes perpetuo decrescant) erit

$\frac{\beta}{a}$ { minor duarum { $a\times\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}$; major duarum { $\frac{\beta}{a}\times\frac{b}{\beta}=\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$. } } Ideoq; { minor quam $\sqrt{\frac{3}{1}}=\sqrt{1\frac{1}{2}}$. ; major quam $\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{1\frac{1}{2}}$. }

Et propterea $\beta=a\times\frac{\beta}{a}=\frac{4}{3}\square$ { minor quam $1\sqrt{2}=1\sqrt{1\frac{1}{2}}$. ; major quam $1\sqrt{\frac{3}{2}}=1\sqrt{1\frac{1}{2}}$. }

Item $\frac{\gamma}{b}$ { minor duarū { $\frac{b}{\beta}\times\frac{\gamma}{b}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}$; major duarū { $\frac{\gamma}{b}\times\frac{c}{\gamma}=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$. } } Ideoq; { minor quam $\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{1\frac{1}{3}}$. ; major quam $\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{1\frac{1}{4}}$. }

Et

Et propterea $b \times \frac{\gamma}{b} = \gamma = \frac{4}{3} \square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{1}{2} \times \sqrt{1\frac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{1}{2} \times \sqrt{1\frac{1}{48}}. \end{cases}$

Hoc eſt, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times3}{2\times4} \times \sqrt{1\frac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times3}{2\times4} \times \sqrt{1\frac{1}{48}}. \end{cases}$

Et (pari ratione) erit $\delta = c \times \frac{\delta}{c} = \frac{4\times6}{3\times5} \square \begin{cases} \text{minor quã } \frac{3\times5}{2\times4} \times \sqrt{1\frac{1}{5}}. \\ \text{major quã } \frac{3\times5}{2\times4} \times \sqrt{1\frac{1}{48}}. \end{cases}$

Hoc eſt, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times3\times5\times5}{2\times4\times4\times6} \sqrt{1\frac{1}{5}}. \\ \text{major quam } \frac{2\times3\times5\times5}{2\times4\times4\times6} \sqrt{1\frac{1}{48}}. \end{cases}$

Et (continuatâ ejuſmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14} \times \sqrt{1\frac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14} \times \sqrt{1\frac{1}{14}}. \end{cases}$

Et ſic deinceps quouſq; libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis poſitos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c, bis item poſitos, exceptis primo & ultimo, qui ſemel ponuntur: Et tota deniq; ratio ſeu fractio, ſic facta, ducatur in Radicem-quadraticam Unitatis aliquotâparte ſui auctæ; eâ nempe quæ denominatorem habet eum qui eſt ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, ſi quæramus numerum juſto majorem, vel parium, ſi juſto minorem.

Atq; hoc pacto eouſq; tandem pervenietur donec majoris & minoris differentia evadat quavis aſſignata minor; (quæ propterea, ſi ſupponatur in infinitum continuanda operatio, tan-

dem evanitura est.) Quod quidem, si opus sit, sic demonstrabitur.

Numerorum, ita ut jam dictum est, continuè multiplicatorum, parium maximus (nempe, ex denominatoris factoribus ultimus) dicatur z; adeoq; imparium maximus (nempe, ultimus ex factoribus Numeratoris,) erit $z-1$, (quippe qui ab isto unitate deficit.) Erit igitur (propter eundem utrobiq; multiplicatorem compositum) numerus justo major ad numerum justo minorem ut $\sqrt{1\ \frac{1}{z-1}}$ ad $\sqrt{1\ \frac{1}{z}}$, (nempe, ut terminalis numerus surdus in illo ad terminalem numerum surdum in hoc,) hoc est, ut $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ ad $\sqrt{\frac{z+1}{z}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{z^2}{z-1}}$ ad $\sqrt{:z+1}$: hoc est, ut $\sqrt{z^2-z}$ ad $\sqrt{:z^2-1}$. Fieri autem potest (aucta nempe, quantum opus est, quantitate z) ut differentia radicum $\sqrt{z^2}$ & $\sqrt{:z^2-1}$: nempe $z-\sqrt{:z^2-1}$: minor evadat quâvis assignanda, (ut notum est, & alibi etiam a nobis dictum ad prop. 39. Con. Sect.) Et propterea numerus justo major excedat numerum justo minorem, secundum eam rationem quæ minor sit quavis assignata. Quod erat ostendendum.

Cum autem, ut ex dictis patet, aucto in infinitum numero z, numerus justo major numerum justo minorem eâ ratione superet quæ minor sit quavis assignata: erit eorum ab invicem differentia (& propterea utriusvis a justo) infinite parva, hoc est, nulla.

Porro; Quoniam, numero z sic in infinitum aucto, illa Unitati adjuncta pars sui aliquota, futura est infinite parva; erit, sive $\sqrt{1\ \frac{1}{z}}$, sive $\sqrt{1\ \frac{1}{z-1}}$, tantundem atq; $\sqrt{1}$, sive 1, (propter evanescentem partem infinite parvam,) quæ multiplicando nihil mutat: Dicimus, fractionem illam $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\&c.}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quæsitum numerum □ præcise; ad quem ita se habet 1, ut circulus ad Quadratum diametri: Vel, (si id magis placeat,) ut est istius fractionis Denominator ad Numeratorem, sic esse dicimus circulum ad diametri

diametri Quadratum: Et, ut Numerator ille ad Denominatorem, ſic Quadratum illud ad Circulum.

Si quis autem curioſius inquirat, quouſq; continuanda erit illa multiplicatio-continua, ut tandem ad differentiam datam, ſive ipſa minorem perveniatur: Nempe ut numerus juſto major, numerum juſto minorem, ipſius parte quamlibet exigua (vel ne illâ quidem) ſuperet: Id hoc modo inveſtigabitur.

Quantitas major dicatur m, minor n, ſitq; earum differentia, iſtius pars quantumvis exigua; puta $\frac{a}{b}\ m = m - n$; & quæratur quouſq; continuanda erit operatio, hoc eſt, quis futurus eſt numerus z multiplicatorum maximus, ut illa differentia (vel ſaltem ipſâ minor) prodeat.

Quoniam igitur $m - n = \frac{a}{b}\ m$, erit $n = m - \frac{a}{b}\ m$; & $m. n :: m. m - \frac{a}{b}\ m :: \frac{b}{b}\ m. \frac{b-a}{b}\ m :: b. b - a :: z. \sqrt{:} z^2 - 1$. (per modo demonſtrata.) Ideoq; $b\sqrt{:} z^2 - 1 :: = bz - az$. Et (utrinq; quadrando) $b^2 z^2 - b^2 = b^2 z^2 + a^2 z^2 - 2abz^2$. Atq; (delendo utrinq; $b^2 z^2$, & reliqua tranſponendo,) $2abz^2 - a^2 z^2 = b^2$. Et deniq; (utrinq; dividendo) $z^2 = \frac{b^2}{2ab - a^2}$. Hujus igitur numeri radix quadratica, (ſi fuerit numerus par,) vel ſaltem, (ſi vel fractus vel ſurdus ſit vel numerus impar) par numerus illa proxime major, futurus eſt multiplicatorum maximus, ut aſſignata differentia, vel ipſa ſaltem minor, proveniat. Quod erat inveſtigandum.

Idem Aliter.

Poſt hanc autem noſtram, ipſius quantitatis □ deſignationem; libet etiam aliam ſubjungere, quam a Nobiliſſimo Viro, atq; acutiſſimo ſimul Geometra, Dom. Guliel. Vicecon, & Barone *Brouncher*, accepi.

Cum illi progreſſionum aliquot mearum propoſuerim, & qua lege procederent indicaverim, id interim rogans, ut qua forma quantitatem illam commode deſignandam putaverit, indi-

caret; Nobilissimus Vir ille, re apud se perpensa, methodo item Infinitorum sibi peculiari quantitatem ad hanc formam commodissime designandam judicavit. Nempe si unitati adjungatur fractio, quæ denominatorem habeat continuè fractum; eâ lege, ut particularium fractionum Numeratores sint 1, 9, 25, &c. numeri quadratici imparium 1, 3, 5, &c. Denominator vero ubiq; 2 cum adjuncta fractione, & sic in infinitum. Hoc simul addito, ut, ubicunq; tandem placeat consistere, pro ultimo numero 2 cum fractione deinceps insecuturâ, ponatur horum aliquis (prout locus ubi consistitur postulaverit) 3, 5, 7, 9, &c. (deinceps ab 1, numero integro, arithmetice proportionalium;) nempe si in primo loco sistatur, 3; si in secundo, 5; si in tertio, 7; & sic deinceps; posito numeri qui locum denominat duplo unitate aucto. Atq; hoc pacto, si in fractionis loco impari sistatur, prodibit numerus justo major; sin pari, justo minor. Quo longius autem procedatur eo propius utrinq; ad numerum justum acceditur.

$$\square = 1\tfrac{1}{2}\tfrac{9}{2}\tfrac{25}{2}\tfrac{49}{2}\tfrac{81}{2}\ \&c.$$

1. justo minor.

$1\frac{1}{3}$. justo major.

$1\frac{1}{2}\frac{9}{5}$. justo minor.

$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{7}$. major.

$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{9}$ minor.

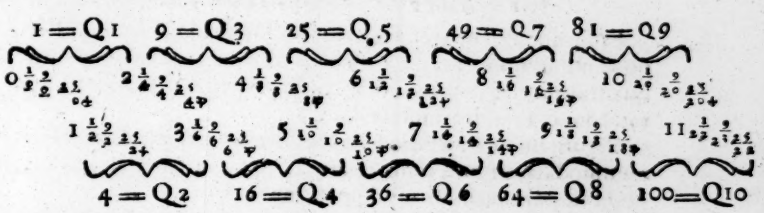
Atq; ad eandem formam numeros reliquos tabellæ nostræ quæsitos designavit; aliasq; ex progressionibus nostris, iis in exposita tabella similes, interpolavit. Totum vero illius methodi processum aperire, longius esset quam ut hic inseratur. Sperabam autem aliquando fore ut id ipsum ab illo in formam digestum publice exhibeatur.

SCHOLIUM.

Quum vero Nobilissimo Viro difficilius persuasum iri video ut illud ipse suscipere velit: conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim proxime, breviter exhibere.

Animadvertit siquidem Nobilissimus Vir, numeros duos impares continue proximos, si invicem ducantur, rectangulum facere, quod quadrato intermedii numeri paris sit unitate minus (puta

(puta $1\times3=3=4-1=Q2-1$. $3\times5=15=16-1=Q4-1$. &c.) Et similiter duos pares proxime positos rectangulum facere quod unitate minus sit quam quadratum intermedii numeri imparis, (puta $0\times2=0=1-1=Q1-1$. $2\times4=8=9-1=Q3-1$. $4\times6=24=25-1=Q5-1$. &c.) Quærebat igitur qua ratione augendi erant factores, ut prodirent rectangula, non quadratis illis unitate minutis, sed ipsis quadratis æqualia. Invenit autem id fieri posse, si utriq; factores fractione augeantur, quæ denominatorem haberet continue fractum in infinitum, ad eam formam quam superius exhibuimus: Nempe ut particularium fractionum Numeratores sint quadrata numerorum imparium, Denominator verò ubiq; integri duplus fractione auctus in infinitum. Ad hanc formam, quousq; libet continuandam.



Factores autem illi sic constituti, quantumlibet continuati, (modo ne in infinitum,) rectangulum facient debito quadrato vel minus, si numerus fractionum integro adjunctarum sit par; vel majus si impar; ita tamen ut quo longius procedatur eo propius ad quadratum debitum accedat. quod hac demonstratione confirmatur.

Esto, ex debitis factoribus quibuslibet, prioris numerus integer F, adeoq; posterioris $F+2$; numerus igitur interjectus (quod latus est quadrati) $F+1$. Eorum rectangulum $Fq+2F$ minus est quam hujus quadratum $Fq+2F+1$.

Jam adjungatur utriq; factori fractio una; factores igitur $F\frac{1}{2F}$, $F+2+\frac{1}{2F+4}$, constituent rectangulum $\frac{4Fqq+16Fq+20Fq+8F+9}{4Fq+8F}$, quod majus erit quam qua-

quadratum $Fq + 2F + 1 = \frac{4Fqq + 16Fc + 20Fq + 8F}{4Fq + 1F}$.

Adjungantur deinde fractiones binæ; Fractiones emergentes $F\frac{1}{2F}\frac{0}{2F}$, $F + 2 + \frac{1}{2F+4} + \frac{9}{2F+4}$, constituent rectangulũ

$$\frac{4Fc + 11F}{4Fq + 9} \times \frac{4Fc + 24Fq + 59F + 54}{4Fq + 16F + 25} =$$

$$\frac{16Fcc + 96Fcq + 280Fqq + 480Fc + 649Fq + 564F}{16Fqq + 64Fc + 136Fq + 144F + 225}$$

quod minus est quam quadratum $Fq + 2F + 1 =$

$$\frac{16Fcc + 96Fcq + 280Fqq + 480Fc + 644Fq + 594F + 225}{16Fqq + 64Fc + 136Fq + 144F + 225}$$

Et sic quousq; procedatur, prodibit rectangulum quod erit nunc minus nunc majus (alternis vicibus) quam expositum quadratum, (quæ tamen differentia perpetuo minuitur, ut patet,) quod erat demonstrandum.

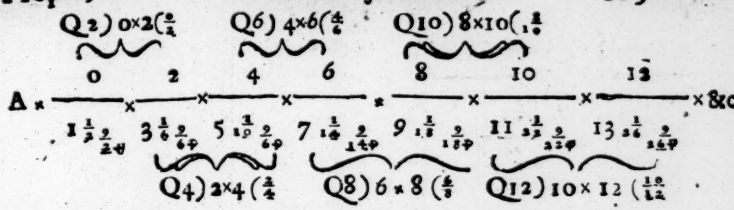
His autem sic inventis, poterunt illa ad series nostras ita accommodari, ut inde innotescant termini in tabella desiderati juxta hunc notationis modum designandi.

Exsempli gratia; Tabellæ nostræ series prima componitur, (ut supra ostensum est) in locis imparibus, ex continua multiplicatione. $A \times \frac{0}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$ &c. vel $A \times \frac{0}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{8}{10} \times \frac{12}{14}$ &c.. Et in locis paribus $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{2}{4} \times \frac{6}{8} \times \frac{10}{12} \times \frac{14}{16}$ &c. Hoc est

$$A \times \overbrace{\frac{-1\frac{1}{2}\frac{9}{2}}{0}}^{0\times2)\,Q\,0\,(\frac{0}{2}} \times \overbrace{\frac{+1\frac{1}{2}\frac{9}{24}}{2}}^{2\times4)\,Q\,2\,(\frac{2}{4}} \times \overbrace{\frac{3\frac{3}{6}\frac{9}{64}}{4}}^{4\times6)\,Q\,4\,(\frac{4}{6}} \times \overbrace{\frac{5\frac{1}{10}\frac{9}{104}}{6}}^{6\times8)\,Q\,6\,(\frac{6}{8}} \times \overbrace{\frac{7\frac{1}{14}\frac{9}{144}}{8}}^{8\times10)\,Q\,8\,(\frac{8}{10}} \times \overbrace{\frac{9\frac{1}{18}\frac{9}{184}}{10}}^{10\times12)\,Q\,10\,(\frac{10}{12}} \times \overbrace{\frac{11\frac{1}{22}\frac{9}{224}}{12}}^{12\times14)\,Q\,12\,(\frac{12}{14}} \times \text{\&c.}$$

Vel etiam, (quod eodem plane recidit,) ad hanc formam,

A ×

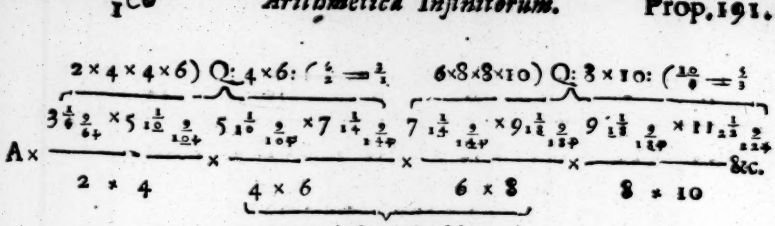


Utrovis modo, rationes quibus numeri vel paribus vel imparibus locis ponendi constituuntur, resolvi possunt in binas (ut patet) quibus constituantur numeri locis continuis ponendi; numeris nempe locorum tum parium tum imparium in unam seriem interpolatione mutua redactis.

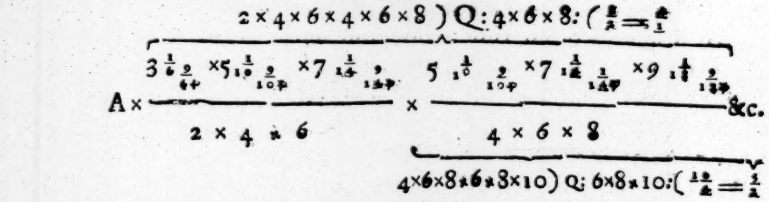
Similiter in serie tertia, cujus numeri in locis imparibus positi, constituuntur ex continue multiplicatis $A \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7}$ &c. vel $A \times \frac{4}{2} \times \frac{8}{6} \times \frac{12}{10} \times \frac{16}{14}$ &c. Et locis paribus $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{8} \times \frac{14}{12} \times \frac{18}{16}$ &c. Hoc est

Atq; hæc quidem abunde sufficiant ad omnes tabellæ nostræ numeros complendos, cum jam supra ostensum sit prop. 188. uno aliquo desideratorum invento reliquos statim innotescere. Si quis tamen cupiat, ut nos seriei primæ & tertiæ rationes resolvimus, ita & reliquarum serierum rationes item resolutas habere: poterit quidem & illud fieri, ita tamen ut in serie quarta (hoc est, post unitatum seriem secunda) erit rationum prodeuntium quælibet bimembris, in quinta trimembris, & sic deinceps.

Nempe, in quarta, ad hanc formam



In ſerie quinta, ad hanc formam.



Et ſimiliter in ſequentibus ſeriebus. Nempe ſingulæ rationes ſeriei quartæ, quintæ, ſextæ &c. componuntur ex ſeriei tertiæ rationibus binis, ternis, quaternis, &c.

Cum autem in ſingulis his rationum jam inventarum ſeriebus (ex quarum continuo ductu conſtituuntur Tabellæ noſtræ numeri) commodum videatur ut in variis formis exhiberi poſſint, & (prout opus videbitur) ab una in aliam transformari quo melius (aliarum fractionum inſtar) operationes arithmeticas ſuſcipiant: Poteſt & id commode fieri per ea quæ in hujus Scholii initio tradita ſunt. Nempe, reſolutis (ut ibidem docetur) quadratis numerorum parium in rectangulorum illis æqualium latera illic indicata, notentur ſingula (ob commodiorem proceſſum) ſuis ſymbolis, hoc modo,

Q2	Q4	Q6	Q8	Q10	Q12	Q14	Q16
□	B	C	D	E	F	G	H	I
$1\frac{1}{2}\frac{2}{24}$	$3\frac{1}{6}\frac{2}{64}$	$5\frac{1}{10}\frac{2}{104}$	$7\frac{1}{14}\frac{2}{144}$	$9\frac{1}{18}\frac{2}{184}$	$11\frac{1}{22}\frac{2}{224}$	$13\frac{1}{26}\frac{2}{264}$	$15\frac{1}{30}\frac{2}{304}$	$17\frac{1}{34}\frac{2}{344}$
		$\frac{4}{1}$ □	$\frac{2}{4}$ B	$\frac{16}{2}$ C	$\frac{25}{16}$ D	$\frac{36}{25}$ E	$\frac{49}{36}$ F	$\frac{64}{49}$ G
				$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}$ □	$\frac{2}{4}\times\frac{25}{16}$ B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$ C	$\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$ D	$\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ E
						$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$ □	$\frac{2}{4}\times\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$ B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ D
								$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ □

Cum enim sit □B = Q2 = 4, & BC = Q4 = 16:
Erit 4. 16 :: □B. BC :: □. C = $\frac{16}{4}$□ = 4□;
Et $\frac{1}{4}$C = □. Item □)4(B, & B)4(□.
Et similiter in locis reliquis.

Adeoq; cum rationes nuper inventæ, ſint in ſerie

prima $A \times \frac{0}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3\frac{1}{6}} \times \frac{4}{5\frac{1}{10}} \times \frac{6}{7\frac{1}{14}} \times \frac{8}{9\frac{1}{18}} \times \frac{10}{11\frac{1}{22}} \times \frac{12}{13\frac{1}{26}}$ &c.

hoc eſt $A \times \frac{0}{\square} \times \frac{2}{B} \times \frac{4}{C} \times \frac{6}{D} \times \frac{8}{E} \times \frac{10}{F} \times \frac{12}{G}$ &c.

ſecunda, $A \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{11} \times \frac{12}{13}$ &c.

tertia, $A \times \frac{B}{2} \times \frac{C}{4} \times \frac{D}{6} \times \frac{E}{8} \times \frac{F}{10} \times \frac{G}{12} \times \frac{H}{14}$ &c.

quarta, $A \times \frac{BC}{2\times4} \times \frac{CD}{4\times6} \times \frac{DE}{6\times8} \times \frac{EF}{8\times10} \times \frac{FG}{10\times12} \times \frac{GH}{12\times14} \times \frac{HI}{14\times16}$ &c

quinta, $A \times \frac{BCD}{2\times4\times6} \times \frac{CDE}{4\times6\times8} \times \frac{DEF}{6\times8\times10} \times \frac{EFG}{8\times10\times12} \times \frac{FGH}{10\times12\times14} \times \frac{GHI}{12\times14\times16}$ &c

Et ſic in cæteris: (ubi tamen intelligendum eſt A non eandem eſſe ubiq; quantitatem, ſed in ſerie prima $A = \infty$ vel potius $\infty \square$, in ſecunda $A = 1 = \infty \square \times \frac{0}{\square}$, in tertia $A = \frac{1}{2}\square = 1 \times \frac{2}{E}$, in quarta $A = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\square \times \frac{4}{C} = \frac{1}{2}\square \times \frac{1}{\square}$, in quinta $A = \frac{1}{3}\square = \frac{1}{3} \times \frac{6}{D} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}C = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6}\square$. Et ſic deinceps. Nam ſeries prima erecta, eadem eſt cum prima tranſverſa; ut ſupra liquet.) Poſſunt illæ, per æquipollentiam modo demonſtratam, ſic exhiberi, ut non niſi uno aliquo numerorum horum interminabilium opus ſit in ſingulis exprimendis; & ſæpe quidem ne uno: Exempli gratia, In ſerie quinta, ratio ſecunda $\frac{CDE}{4\times6\times8} = \frac{36E}{4\times6\times8} = \frac{64C}{4\times6\times8} = \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c. Hæc igitur ratio, quolibet modorũ illorum deſignata, ducta in iſtius ſeriei terminũ ſecundũ 1, (in tabella noſtra repertum) habetur terminus tertius, $1 \times \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c.

Tertius autem hic terminus, ductus in rationem ſequentem $\frac{DEF}{6\times8\times10} = \frac{64F}{6\times8\times10} = \frac{100D}{6\times8\times10} = \frac{900B}{1920} = \frac{15}{8\square} = \frac{15B}{32} = \frac{15}{20} = \frac{5D}{24} = \frac{40}{3E}$ &c. Exhibebit ejuſdem ſeriei terminum quartum $\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$, eundem nempe quem exhibet

exhibet Tabella. (Sed & idem terminus pariter exhibebitur ex ductu ſecundi termini 1, in rationem ex ſecunda & tertia compoſitam.) Atq; ad hunc modum licebit ſingulos tabellæ noſtræ terminos indicare, adhibito nonnunquam uno quovis, ſæpius autem ne uno quidem, numerorum iſtorum interminabilium; quorum quidem nos primum, hac nota □ deſignatum, in tabella noſtra adhibuimus.

Eſt igitur ratio circuli ad Quadratum diametri, (per jam dicta)

$$\frac{1}{4}p.d.d^2 :: 1.\ \square = \frac{4}{B} = \frac{C}{4} = \frac{9}{D} = \frac{9E}{64} = \frac{225}{16F} = \frac{25G}{256}$$

&c. Et ſimiliter (cum ſit ratio perimetri ad diametrum quadrupla rationis circuli ad quadratum, quia nempe $\frac{1}{4}p.d.d^2 : \frac{1}{4}p.d.$) ratio perimetri ad diametrum $p.d :: 4.\square$: & diametri ad perimetrum $d.p :: \square.4 ::$

$$:: 1.\ \overset{4}{\square} = B = \frac{16}{C} = \frac{4D}{9} = \frac{256}{9E} = \frac{64F}{225} \quad \frac{1024}{25G}\ \&c.$$

Nempe $\left.\begin{matrix}\square\\ B\end{matrix}\right\}$ ut 1 ad : ſic Circulus ad Quadratum Diametri. ſic Circuli Diameter ad Perimetrum.

Supereſt, ut rationem oſtendam cur in aſſignando valorem quantitatis □, ſuperius dixerim, pro fractionis continue fractæ denominatore ultimo (ubicunq; ſiſtendum quis velit) ponendum eſſe, non 2, ſed vel, 3, 5, 7, 9, &c. prout locus ubi conſiſtitur poſtulaverit. (quod non tam neceſſitatis, quam perſpicuitatis cauſa factum eſt.) Quæ quidem ratio, hæc eſt.

Cum ſupponatur (juxta jam tradita) $\square \times B = Q2 = 4$. ſitq; $\square = 1\frac{1}{2}\frac{2}{2p}$ & $B = 3\frac{1}{6}\frac{2}{6+}$. Adeoq; ſi numerum $4 = Q2$ dividamus per B (factorem poſteriorem) prodibit □. Si quantitas B imperfecte ſumatur, non prodibit ipſa quantitas □, ſed alia quæ major ſit vel minor, prout B imperfecte ſumpta, ſit ipſa B accurate, minor vel major. Nempe ſi pro diviſore B ſumatur 3, diviſione facta, pro □ prodibit $1\frac{1}{3}$: ſi pro diviſore $3\frac{1}{6}$. prodibit $1\frac{1}{2}\frac{2}{5}$: ſi $3\frac{1}{6}\frac{2}{6}$; prodibit $1\frac{12}{22}\frac{22}{2}$. Et ſic deinceps: ut ex ipſo calculo patebit.

Et ſic in $B = 3\frac{1}{6+}$, $C = 5\frac{1}{10+}$, $D = 7\frac{1}{14+}$, &c. faciendum erit. Nempe in B, denominator ultimus erit unus ex his 5, 7, 9,

11, &c. (is nempe quem locus ubi ſiſtitur poſtulaverit;) qui a 3 (numero integro unde quantitatis B deſignatio inchoatur) in progreſſione Arithmetica binario continue creſcunt. Et ſimiliter, in C, unus ex his 7, 9, 11, 13, &c: Et, in D, unus ex illis 9, 11, 13, 15, &c. (qui nempe illic a 5, hic a 7, in Arithmetica progreſſione continua, binario creſcunt:) Et in ſequentibus ſimiliter: quod ipſe calculus indicabit.

Adeoq; univerſaliter; in earum quantitatum qualibet deſignanda, (quocunq; tandem loco ſiſtere libuerit,) pro denominatore ultimo ſumendus erit numeri qui fractionum locum denominat duplus numero integro quæ deſignationem inchoat auctus.

Si quis autem quærat, cur in hoc proceſſu (in denominatore ultimo deſignando) per factorem poſteriorem potius quam priorem diviſionem faciamus: Ratio eſt, quia ſic res commodius procedit. Nam uti jam denominatores illi ab inchoante numero integro arithmetice procedunt creſcendo; ſi per factorem priorem fieret diviſio, denominatores illi ab inchoante numero integro retrocederent decreſcendo, donec tandem perveniatur ad numeros negativos (qui deſignationem magis turbabunt) ut experimento facto patebit. Adeoq; ad illam legem, ſi (verbi gratia) deſignanda ſit quantitas F, dividendo Q 10 = 100 per E, denominatores illi ſic prodeuntes futuri ſunt 9, 7, 5, 3, 1, — 1, &c. Si autem ad methodum priorem dividatur Q 12 = 144 per G, fuiſſent 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, &c. nempe a numero 11 illic decreſcendo, hic creſcendo: ubi autem hac methodo tota quantitas prodit juſta major, illa prodibit etiam juſtâ major, & contra. Unde etiam patet, priorem illam methodum deſignandi ultimum denominatorem non modo minus turbatam, ſed & magis accuratam eſſe, quam eſt poſterior. Cum enim exceſſus & defectus ſit ſemper penes ultimam fractionem (cujus nempe adjectione quantitas quæ prius erat juſtâ major fit juſtâ minor, aut contra,) ubi denominator eſt major (eodem manente numeratore) fractio minor eſt, adeoq; ſive exceſſus ſive defectus minor, quam ſi denominator ille fuiſſet major: adeoq; denominatorum illorum aſſumptio per continuum augmentum minuit, at quæ per continuum decrementum auget errorem. Quod quidem eouſq; verum eſt, ut ne quidem illa noſtra emendatio, quæ per continuum deno-

mina-

minatorum incrementum procedit, quicquam adfert commodi (sed incommodi potius ob dictam rationem,) donec eousq; procedatur ut denominator ille auctus major sit denominatore communi, (eo nempe qui æquatur duplo inchoantis numeri integri,) nam, donec eo perveniatur, mutatio illa communis denominatoris in denominatorem crescentem, non minuit, sed auget adjunctam illam fractionem, adeoq; & errorem.

Hoc unicum adhuc restare videtur; nempe ut ostendam qua lege Fractiones hujusmodi continuæ fractæ ad fractiones ordinarias commode reducantur.

Cum autem id fieri possit methodo nemini ignota, inchoando a fine, & recedendo donec ad principium tandem deveniatur: Optandum interim videtur, ut id fieri possit inchoando a principio & procedendo quousq; libet. Hoc igitur qui fieri possit jam sumus ostensuri.

Esto igitur fractio ejusmodi continue fracta quælibet, sic designata. $\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma}\,\frac{d}{\delta}\,\frac{e}{\varepsilon}$ &c.

Cum igitur constet, recepta methodo, reductionem institui posse ad hunc modum,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{b+\alpha}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma} = \frac{ac+a\beta\gamma}{\alpha c+b\gamma+\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma}\,\frac{d}{\delta} = \frac{a\beta d+ac\delta+a\beta\gamma\delta}{b\alpha+\alpha\beta d+\alpha c\delta+b\gamma\delta+\alpha\beta\gamma\delta}$$

Et sic deinceps, quantum opus erit. Nos inde hanc colligimus regulam, cujus ope a principio reductionem inchoemur quousq; libet continuandam;

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P}{N_3\times D_1}\,\frac{Q}{N_1} \;+\; \frac{P}{D_3\times D_2}\,\frac{Q}{N_2} \;:=\; \frac{Q}{N_3} \\ \qquad\qquad\qquad\

Hoc eſt; Si (trium continue ſequentium fractionum) tam Numerator tertius propoſitus ducatur in Numeratorem primum jam jam quæſitum, quam Denominator tertius propoſitus in Numeratorem ſecundum jamjam quæſitum, aggregatum erit Numerator tertius quæſitus. Et ſimiliter, ſi tam Numerator tertius propoſitus ducatur in Denominatorem primum jamjam quæſitum, quam Denominator tertius propoſitus in Denominatorem ſecundum jamjam quæſitum, aggregatum erit Denominator quæſitus.

Exemplo res fiet manifeſta.

Sit fractio reducenda $\frac{1}{2}\frac{9}{3}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{11}$

Operatio ſic inſtituetur. Inventa fractione ſecunda modo uſitato; tertia & quæ deinceps ſic reperientur.

$\frac{25}{2}$	$\times 1 = 25$	29		P	Q
	$\times 2 = 4$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{25}{2}$	$\times 2 = 50$	76		$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{13} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}$
	$\times 13 = 26$			$\frac{25}{2}$	$\frac{29}{76} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}$
$\frac{49}{2}$	$\times 2 = 58$	156		$\frac{49}{2}$	$\frac{256}{789} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}$
	$\times 29 = 58$				
$\frac{49}{2}$	$\times 13 = 637$	789		$\frac{81}{11}$	$\frac{4065}{14835} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{11}$
	$\times 76 = 152$				
$\frac{81}{11}$	$\times 29 = 2349$	4065			
	$\times 156 = 1716$				
$\frac{81}{11}$	$\times 76 = 6156$	14835			
	$\times 789 = 8679$				

Et ſic deinceps quouſq; opus erit. Ratio operationis ex jam dictis patet.

Siquis autem adhuc miretur, unde factum ſit quod fractiones hæ continue fractæ, (prout hic vel illic cuiquam ſiſtere placuerit) ſint alternatim nunc majores nunc minores quantitate debita: hujus rei cauſam ſic breviter accipiat. Cum certum

tum ſit numerum integrum ſine ulla adjuncta fractione juſto minorē eſſe, fractio prima, huc integro adjuncta, quantitatem auget: ſed eò minus auget quo ipſa minor fuerit. Hæc igitur prima fractio quantitatem auget, & quidem eouſq; ut jam, quæ fuerat juſta minor fiat juſta major. Hujus autem fractionis, eodem manente numeratore, ſi denominator augeatur; (quod fit adjecta fractione ſecunda,) fractio prima, adeoq; & tota quantitas, adjectione ſecundæ minuitur. Hæc autem diminutio eò minor erit (adeoq; & tota quantitas major) quo ipſius ſecundæ fractionis (manente numeratore) denominator augetur; quod fit adjectione tertiæ fractionis. Tertia igitur fractio ſecundum minuit, adeoq; primam auget, ut & totam igitur quantitatem. Et ſimiliter in ſequentibus. Puta quartæ adjectio minuit tertiam, hoc eſt, auget, ſecundam, adeoq; minuit primam, totamq; quantitatem. Quinta minuit quartam, adeoq; auget tertiam, minuit ſecundam, augetq; primam totamq; quantitatem. Adeoq; fractionum adjectio in locis imparibus auget, in paribus minuit quantitatem: Quod non de his tantum, ſed de quibuſvis aliis fractionibus ita (quoad denominatores) continue fractis, intelligendum erit.

Atq; hactenus Nobiliſſimi Viri mentem, quantâ potui brevitate ſimul atq; perſpicuitate expoſui; quæq; de ipſius methodo dicenda habui breviter indicavi.

PROP. CXCII. *Theorema.*

SI ſit æquabilis Curva (non hinc inde ſubſultans) VC, cujus Axis VX, & Tangens invertice VT; unde ductis ad curvam rectis axi parallelis, & ab invicem æqualibus diſtantiis remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, &c. (in locis paribus,) ſint ut 1, 6, 30, 140, &c. (qui numeri fiunt ex continuâ multiplicatione horum, $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$ &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis 1, 6, interponendum,) ſic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Sequitur ex Prop 139, et 135.

PROP. CXCIII. *Theorema.*

SI exponatur æquabilis curva VC, cui occurrat in vertice VT, unde ductis ad curvam quotlibet rectis parallelis & æqualiter ab invicem remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, Decima, &c. (in locis paribus.) ſint ut $1, \frac{1}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 * \frac{1}{2} * \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ &c.) Erit ut Secunda ad Tertiam, (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis $1, \frac{1}{2}$, interponendum,) ſic Circulus ad Quadratum Diametri. (Ut autem Secunda ad Quintam, ſic Triplum Circuli ad Quadruplum iſtius Quadrati, &c.)

Sequitur ex Prop. 118, 121, et 185.

PROP. CXCIV. *Theorema.*

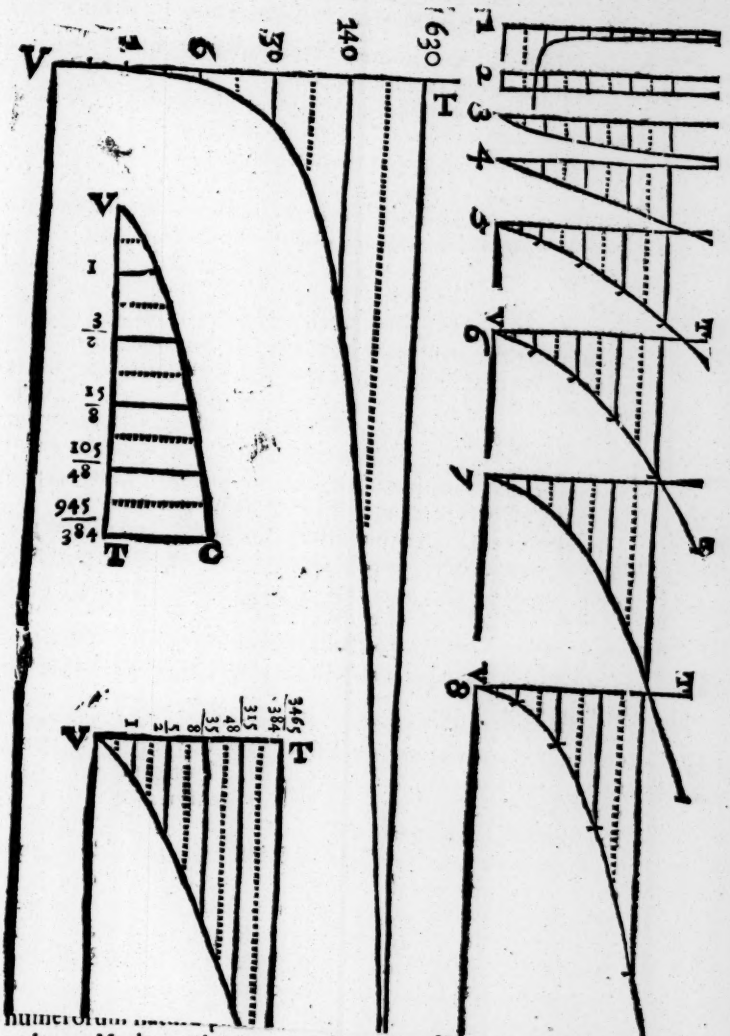
SI ſit æquabilis curvæ VC, axis VX, tangens in vertice VT, unde rectæ ad curvam ductæ (axi parallelæ & æqualibus interſtitiis diſſitæ) ſecunda, quarta, ſexta, octava, decima, &c. (in locis paribus) ſint ut $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{15}{48}, \frac{315}{3840}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ &c.) Erit, ut ſecunda ad tertiam (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis $1, \frac{1}{2}$, interponendum;) ſic circulus ad $\frac{\pi}{4}$ Quadrati circumſcripti (ſive quadrati ex diametro;) Sive Triplum circuli ad Quadruplum quadrati circumſcripti. (Ut autem Secunda ad Quintam, ſic Triplum circuli ad Octuplum iſtius Quadrati. &c.)

Patet ex præced. & Tabella prop. 189.

SCHOLIUM.

Et quidem hujuſmodi aliæ propoſitiones innumeræ ex eadem Tabella (prop 189) deduci poſſunt: formatis ſcilicet aliis atq; aliis ejuſmodi curvis juxta iſtius Tabellæ tenorem.

Quales autem futuræ ſint iſtæ omnes curvæ non adeo facile erit judicare. Hoc interim de quibuſdam obſervare licet. Nempe



numerorum [illegible]
ut inter Mathematicos conveniat quâ velint notatione (sive
mea sive alia adhuc ad arbitrium excogitanda) rationem illam

ἀρρητον

PROP. CXCIII. *Theorema.*

SI exponatur æquabilis curva VC, cui occurrat in vertice VT, unde ductis ad curvam quotlibet rectis parallelis & æqualiter ab invicem remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, Decima, &c. (in locis paribus.) ſint ut $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 * \frac{3}{2} * \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c.) Erit ut Secunda ad Tertiam, (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis $1, \frac{3}{2}$, interponendum,) ſic Circulus ad Quadratum Diametri. (Ut autem Secunda ad Quintam, ſic Triplum Circuli ad Quadruplum iſtius Quadrati, &c.)

Sequitur ex Prop. 118, 121, et 185.

PROP. CXCIV. *Theorema.*

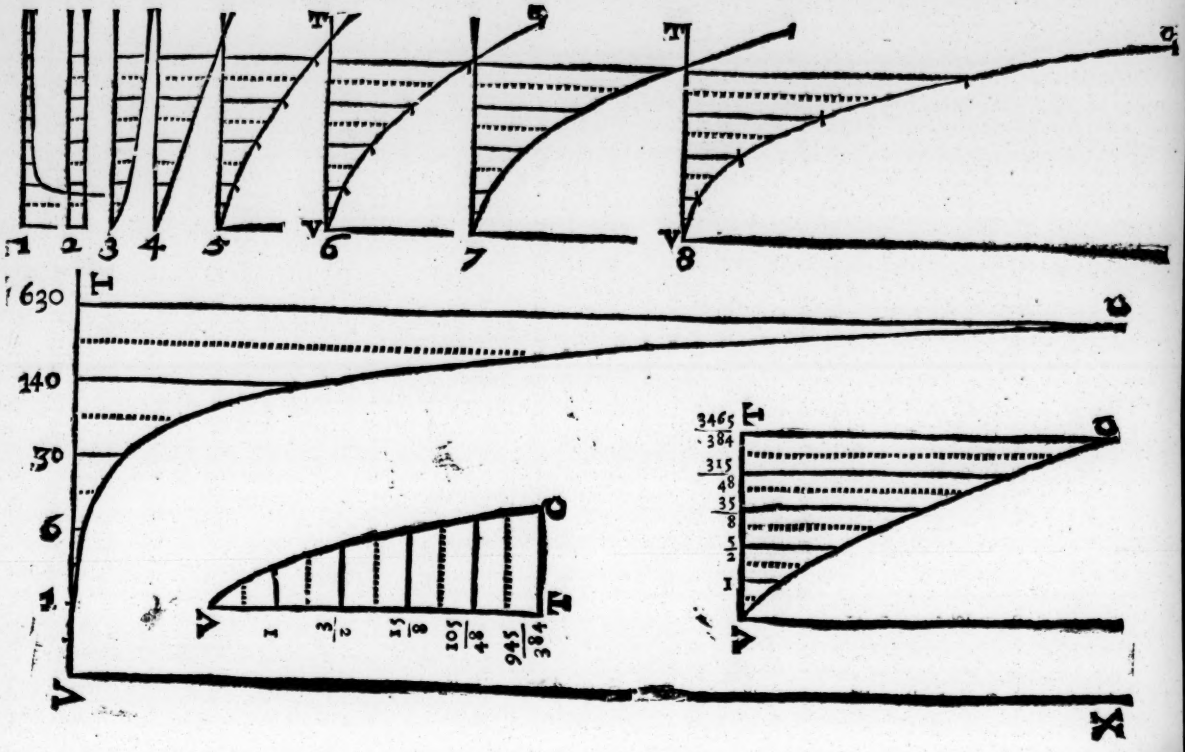
SI ſit æquabilis curvæ VC, axis VX, tangens in vertice VT, unde rectæ ad curvam ductæ (axi parallelæ & æqualibus interſtitiis diſſitæ) ſecunda, quarta, ſexta, octava, decima, &c. (in locis paribus) ſint ut $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{315}{48}, \frac{3465}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{6} \times \frac{11}{8}$ &c.) Erit, ut ſecunda ad tertiam (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis $1, \frac{3}{2}$, interponendum;) ſic circulus ad $\frac{4}{3}$ Quadrati circumſcripti (ſive quadrati ex diametro;) Sive Triplum circuli ad Quadruplum quadrati circumſcripti. (Ut autem Secunda ad Quintam, ſic Triplum circuli ad Octuplum iſtius Quadrati. &c.)

Patet ex præced. & Tabella prop. 189.

SCHOLIUM.

Et quidem hujuſmodi aliæ propoſitiones innumeræ ex eadem Tabella (prop. 189) deduci poſſunt: formatis ſcilicet aliis atq; aliis ejuſmodi curvis juxta iſtius Tabellæ tenorem.

Quales autem futuræ ſint iſtæ omnes curvæ non adeo facile erit judicare. Hoc interim de quibuſdam obſervare licet. Nempe


1
2
3
4
5
6
7
8
T
V
Q
630
140
30
6
1
X
1
3/2
15/8
105/48
945/384
3465/384
315/48
35/8
35/16
1

Nempe; In ſerie ſexta, numeri (Triangulares) 1, 3, 6, 10, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ &c) Sunt ut quadrata ordinatim applicatarum in Hyperbola; ut dictum eſt prop. 173.

In ſerie Quarta, numeri (arithmetice proportionales) 1, 2, 3, 4, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{2}{1}$, $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$ &c) ſunt ut quadrata ordinatim applicatarum in Parabola; ſive ut rectæ in Triangulo; ut patet.

In ſerie Secunda, numeri (æquales) 1, 1, 1, 1, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ &c.) ſunt ut quadrata rectarum (vel etiam ipſæ rectæ) in Parallelogrammo. ut patet. Adeoq; in Secunda & Quarta ſerie, pro curvis prodeunt revera rectæ, latus nempe illic Trianguli, hic Parallelogrammi.

In ſeriebus ſexta, octava, decima, &c. (alternatim ſumptis,) prodibunt curvæ magis adhuc compoſitæ, ſed quarum characteres non minus accurate deſignantur in dicta tabella, quam Parabolæ, Hyperbolæ aut Ellipſeos characteres noti.

In reliquis autem ſeriebus interjectis, prima, tertia, quinta, &c, (in locis imparibus,) provenient item æquabiles curvæ & regulares (quales puta pro Geometricis agnoſceret Carteſius,) quamvis earum characteres difficilius explicari poſſint, ut qui expoſitis ſerierum in locis paribus poſitarum, characteribus ſunt intermedii juxta illam quam exhibuimus progreſſionis formam in prop. 187.

Qualiter autem ad aſpectum ſe præbent expoſitæ curvæ, (tam quæ locis paribus quam quæ imparibus conveniant,) ſingulis tabellæ ſeriebus indicatæ, oſtendit appoſita figura, quæ ſigillatim illas depictas exhibet, debitis ſuis menſuris ex eâdem (ut loquuntur) *Scala* deſumptis.

Notandum interim eſt (quod & ipſe aſpectus indicat,) quod convexitas curvæ VC (rectam VT verſus obverſa) quæ in curvarum ultima eſt maxima, (ſi retro computemus,) in anterioribus ſenſim decreſcit; donec in loco quarto curva illa in rectam (ſecantem) tranſeat (quæ inter convexam & concavam eſt media,) deinde loco tertio in concavam, ſecundo autem in parallelam, & in primo deniq; in recurvam, (quæ nempe ex iis partibus ad rectam continue appropinquat quibus reliquæ inde recedunt.) Item recta VT, quæ in quinta & ſequentibus eſt tangens

gens, in quarta rectam ſecat, in tertia fit curvæ diameter, in ſecunda fit parallela, & in prima deniq; Aſymptota.

Quænam autem ſint curvarum harum omnium affectiones, & quibus modis commodiſſime deſcribantur, non libet mihi (feſſo jam, varioq; & impedito itinere ſatis laſſato) curioſius impræſentiarum inquirere; ut nec Hyperbolæ quadraturam ulterius (quam ſupra factum eſt) attingere. Et quidem fieri poteſt ut gratam nonnullis negotium vel ea tacendo præſtiturus ſim, quo liceat ipſis, indicata jam methodo, eiſdem inveſtigandis oblectari.

Eas autem omnes tales eſſe quales pro *Geometricis* haberi velit Carteſius, quo minus dubitem id facit, quod de locis paribus jam ſatis conſtet, detectis jamjam eorum characteribus, adeoq; & de locis imparibus (quamvis eorum characteres non ita commode deſignari poſſint) non aliter cenſendum eſt. Quales autem illæ ſint Æquationes quæ ſingulis conveniant, ex ipſo ordine patebit. Cum enim ſeriei quartæ conveniat æquatio Lateralis, ſextæ Quadratica, octavæ Cubica, &c. (puta quarum ſuprema poteſtas eſt, Latus, Quadratum, Cubus, &c;) ad ſeries interjectas tales neceſſe eſt æquationes pertinere quæ ſint his intermediæ; (puta, quintæ, talis quæ ſit quadraticæ & laterali intermedia; & de cæteris pariter judicandum.) An autem ejuſmodi Æquationes ſat commode poſſint recepto more deſignari, dubitandum forſan erit.

Mihi interim ſufficiat (nec quidem ſuſceptorum laborum pœnitet) rem hactenus perduxiſſe; novamq; ingreſſo ſemitam, eandem aliis aperuiſſe: quæ quidem quò me duceret, in principio non adeo facile erat hariolari, ſed quæ ad curvilinearum (taltem quarundam) quadraturam, aliaq; ejuſmodi abſtruſiora problemata, recta tendere videbatur. Nec quidem ſpem fefellit. Utut enim in Circulo, ratio ea quam habet ille ad Quadratum (quam mihi præ oculis etiam ab initio fuiſſe non nego) non ita plane ex voto ſe prodat, ut in aliis aliquot curvilineis, recepto aliquo notationis modo explicanda, (ſed per varios Mæandros me deduxerit, & tandem in ἄῤῥητον quiddam deſinat) Operæ tamen pretium eſt eatenus eam indicaſſe quatenus ipſa numerorum natura patitur; ut nihil inſuper reliquum ſit quam ut inter Mathematicos conveniat quâ velint notatione (ſive mea ſive alia adhuc ad arbitrium excogitanda) rationem illam

ἄῤῥητον

ἄῤῥητον indicare. In aliis autem curvilineis non paucis ita ex voto ſucceſſerunt omnia (& quidem ſupra ſpem non raro,) ut innumeras Curvilineorum quadraturas, partim antehac planè incognitas, partim etiam cognitas quidem antea, ſed nova jam & faciliori methodo traditas, indicaverim: Aliaq; innumera ex intricatioribus Matheſeos problematis, (puta de Pyramidoidibus, Conoidibus, & Sphæroidibus, de linea Spirali, & Spaciis ipſi adjacentibus, de Paraboloidibus, aliiſq; paſſim,) vel primus detexerim, vel multum elucidaverim: Figuras item in infinitum continuatas (non unam aliquam, quod tamen a Toricellio factum, ſatis videbatur mirandum, ſed varias) tam planas quam ſolidas, ad menſuram notam & finitam reduxerim.

Facile quidem fuiſſet (modo libuiſſet) innumeras paſſim propoſitiones alias inſeruiſſe, (quod nemini harum rerum perito dubium eſſe poteſt,) cum ſit ea quam trado doctrina conſectariorum ſatis ferax. Et quidem in primoribus hujuſce tractatus partibus copioſius hujuſmodi conſectaria interſerui, ideo præſertim ut quo tenderet hæc doctrina indicarem. Verum in ſequentibus illud parcius proſecutus ſum, partim quòd jam ex præcedentibus eouſq; pateret methodus noſtra ejuſq; utilitas ut jam ſuo Marte poſſit quilibet id ipſe præſtare, partim etiam ne propoſitionum numerus (qui jam turgere videbatur) adeoq; totius tractatûs moles nimis excreſceret. Adeoq; multa paſſim in tranſitu leviter indicata ſunt, quæ, ſi libuiſſet curioſius proſequi, integram potius diſquiſitionem ſibi ſigillatim poſtularent.

Quod reliquum eſt; orandi ſunt harum rerum periti, ut quod nos præſtare valuimus candide dignentur acceptare, & ſiquid ipſis rectius obtigit in publicum Matheſeos augmentum impertiri.

LAUS DEO.

Index Propoſitionum.

Prop. 1. &c. *De ſeriebus Primanorum, ſive Arithmetice proportionalium finitis & infinitis, ad ſeries Æqualium comparatis.*
3. 4 *De Triangulo, & Conoidibus ſive Pyramidoidibus Parabolicis.*
5. &c. *Comparatio lineæ Spiralis & Peripheriæ*
14, 15, 16, *Comparatio Spiralis & Parabolæ*

19 &c De *seriebus Secundanorum, sive in Arithmetice-proportionalium ratione duplicata*
22 De *Cono & Pyramide ad Cylindrum & Prisma comparatis*
23 De *complemento Semi-parabolæ, ad Parallelogrammum comparato*
24 &c De *Figuris Spiralibus ad Circulum & Sectores comparatis*
39 &c *De Seriebus Tertianorum*
42 De *Complemento Paraboloidis Cubicalis*
43 &c De *seriebus Quartanorum, Quintanorum, aliorumq; in Arithmetice-proportionalium ratione multiplicata qualibet*
45 De *Complementis Parabolæ, & Paraboloidum Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis, &c. ad Parallelogramma Comparatis. De spiralium item variis generibus ad Peripherias comparatis, & figuris illis adjacentibus comparatis ad Circulos & Sectores*
48 &c De *Conoidibus sive Pyramidoidibus, Parabolarum & Paraboloidum complementis aptandis; (quum nempe Diametri vel Axes, sint Parabolæ aut Parabol. tangentes;) ad Cylindros & Prismata comparandis.*
53 &c De *seriebus Subsecundanorum, Subtertianorum, aliorumq; in Arithmetice proportionalium ratione Submultiplicata qualibet*
55 &c De *Parabolis & Paraboloidibus ad Parallelogramma comparandis.*
58 &c De *Seriebus Compositis*
60 &c De *Parabolis & Paraboloidibus omnigenis, ad Parallelogramma comparandis; eorum Conoidib. sive Pyramid. ad Cylindros & Prismata.*
64 *Theorema universale, de Seriebus præmissis omnibus ad seriem Æqualium Comparandis.*
65 De *Seriebus diversis invicem comparandis*
66 &c De *Seriebus (sive analogis Figuris) truncatis, earumq; segmentis invicem comparandis*
73 &c De *Seriebus invicem respective multiplicandis; & Figuris ejusmodi multiplicatione provenientibus*
81 &c De *Seriei unius ad aliam Applicatione, sive Divisione; & Figuris inde oriundis*
87 &c De *Seriebus Reciprocis; & Figuris interminabilibus*
102 &c De *Figurarum interminabilium area, sive earum ad Parallelogramma comparatione*
106, 107 De *Seriebus Reciprocis multiplicandis & dividendis, & Figuris inde oriundis.*
108 &c De *Æqualium serie, seriebus aliis respective mulctata; et Figuris item similiter mulctatis, vel excavatis.*
117 De *Seriei Æqualium, seriei Primanorum mulctatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*
118 De *Seriei Æqualium, serie Secundanorum mulctatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*

119 De *Conoidibus & Pyramidoidibus ad Parabolæ vel Paraboloideos cujuſvis ordinatim-applicatam aptatis*

120 &c *Comparatio Circuli ſive Ellipſeos ad quadratum Diametri ſive parallelogrammum circumſcriptum: Sphæræ item & Sphæroideos vel Pyramidoideos Elliptici, ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum*

125 &c *De Seriei Æqualium, ſerie Tertianorum, Quartanorum, &c. multatæ, Reſiduis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*

128 &c *De Seriei Æqualium, ſerie Subſecundanorum, Subtertianorum, &c, multatæ, Reſiduis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*

129 *De Conoidibus & Pyramidoidibus, ad Parabolæ, vel Paraboloideos cujuſvis, Complementi Ordinatim-Applicatam (diametro Parabolæ vel Paraboloideos parallelam) aptatis.*

133 *De ſeriei Primanorum, ſerie Secundanorum multatæ, Reſiduis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*

134 &c *Comparatio circuli ſive Ellipſeos ad Parallelogrammum; & Sphæræ vel Sphæroideos ad Cylindrum*

139 &c *De Seriei Primanorum, ſerie Tertianorum, Quartanorum, &c, multatæ, Reſiduis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*

145, 146 *De Seriei Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c, aliis ſeriebus multatæ, Reſiduis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c*

147 &c *De Serie Subſecund: multata ſerie Primanorum, Secundanor: Tertianorum, &c, vel etiam Radicum quadraticarum Tertian: Quint: &c*

154 *De Seriebus Subtertianorum, Subquartan: &c, multatis*

155 &c *De Seriebus Auctis; earum ſ. aggregatorum Quadratis, Cub: &c*

162 &c *Comparatio Conoideos vel Pyramidoideos Hyperbolici, ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum; ipſiuſq; Hyperbolæ ad circumſcriptum Parallelogrammum.*

166, 167 *De Seriebus in Series inverſas reſpective multiplicandis.*

168 *Circulus ad Quadratum Diametri, ut 1 ad quantitatem nota □ deſig:*

169 &c *De tabella numerorum figuratorum interpolanda: & quantitatis □ inveſtigatione*

171 &c *Inveſtigatio characteris numeri Triangularis; Deq; ipſis numeris Triangularibus interpolandis*

176 &c *Inveſtigatio Characteris numeri Pyramidalis, Triangulipyramidalis &c. Et de ejuſmodi numeris interpolandis.*

184 *Interpolationis inceptæ continuatio.*

185 &c *De Seriebus Tabellæ numerorum figuratorum interjectis, earũq; Characteribus &c. ipſaq; Tabella, quantum numerorum natura patitur, completa.*

191 *Quantitatis □, in numeris abſolutis quam proxime deſignatio.*

192 &c *Ejuſdem deſignatio in lineis.*

FINIS.

ECLIPSIS SOLARIS OXONII VISÆ

Anno Æræ Christianæ 1654.

2° *Die Mensis Augusti,*

STILO VETERI,

OBSERVATIO.

Observatore

JOHANNE WALLISIO

Geometriæ Professore SAVILIANO.

OXONII,

Typis *L. LICHFIELD* Academiæ Typographi,

Impensis *THO. ROBINSON,*

Anno Salutis 1655.

AMPLISSIMO VIRO

IOHANNI HEVELIO,

SENATORI DANTISCANO,

Matheſeos peritiſſimo;

IOHANNES WALLISIUS

S.

NON *illud agitur hiſce literis (Vir Illuſtris) ut quanta Tua fuerit in rebus Mathematicis peritia, quanta induſtria, aut quantum etiam ipſa Matheſis ſedulitati Tuæ debeat, literato Orbi innoteſcat. Quotusquiſq; enim eſt qui illa neſcit? Aut quidem, ſi neſciretur, quis ego ſum (vix de nomine notus) ut ea mihi de Te prædicanti magna debeatur fides? Non patiuntur autem egregia illa quæ ex tuis exſtant opera, non patitur nominis tui celebritas, nec Mathematicorum omnium in te converſi oculi patiuntur, ut* HEVELII *nomen ab erudito*

Orbe vel ignoretur, vel amplis laudibus undiq; non efferatur. Quisquis enim limatissimum illud opus Selenographicum, (ut cætera taceam,) quod Te authorem prædicat, inspexerit; &, quantâ curâ, quantis sumptibus, quantis vigiliis, quanto deniq; (ut uno verbo omnia complectar) Viro opus sit, ut egregium illud opus instruatur, satis perpenderit; non poterit ille non in admirationem rapi. Quis enim illum vel tacere poterit, vel satis eloqui, qui unus isthæc omnia peregerit! Ego equidem non satis mirari valeo, summum virum, tam rebus domesticis, quàm negotiis publicis, & obeundo magistratu, occupatissimum, eousq; cœlestibus observationibus vacare posse, eisq; tantâ cum sedulitate, tanto & temporis & facultatum & valetudinis etiam impendio, tam pertinaciter invigilare. Tanto enim apparatu, tanto molimine, tantis sumptibus, in conficiendis instrumentis, in vitris excolendis, aptisq; parandis observationi locis, in tot insuper Lunæ phasibus, aliisq; Cœli Phænomenis, accuratè notandis, delineandis, æriq; incidendis, opus esse nemo non fatebitur, ut ea non unum aliquem, licèt summum virum, sed sat multos potiùs viros egregios postulare videantur.

Cùm autem mihi contigerit, non modo Tuis quæ publicè exstant scriptis, sed & humanissimis ad me literis Tuis aliquoties frui; a gratitudinis officio neutiquam alienum duxi, quæ nobis nuper observare licuit tecum communicare. Quamvis enim hujusmodi conatus nostri, tanti non sint ut cum Tuis illos comparandos velim, (cùm neq; tantus mihi suppetat instrumentorum delectus, nec eam mihi vendicem, minùs exercitato, in observando ἀκρίβειαν·) attamen Tibi non ingratum fore facilè judico, quid ab

aliis

aliis observatum fuerit intelligere: præsertim cùm ea quæ a Luminarium Eclipsibus addisci solent, non tam ab una aliqua, utut accurata, uno in loco præstita observatione, quàm ex collatis variis, in variis Terræ locis peractis, innotescant. Ideóq; hanc nostram qualemqualem deficientis Solis *Observationem* Oxonii *habitam, sive observantiæ, sive gratitudinis ergô, Tuis oculis subjicere visum est, simul cum ea qua usus sum observandi methodo. Siquid autem inde vel delectationis vel commodi perceperis, omnino mihi gratissimum erit aliquid præstitisse tanto viro non ingratum. Superest, ut a Deo Opt. Max. omnia Tibi felicia precatus, Tuiq; observantissimum me professus, Valere jubeam. Dabam* Oxonii, *ipsis Calendis Januariis, Anno* 1655.

Eclipſin Solarem, Oxonii Viſam, Aug. 2. 1654. ſtil. Vet.

Obſervandi Methodus.

CUM Ephemeridum indicio moniti, Eclipſin Solarem ſatis quidem amplam ſecundo die Menſis Auguſti (ſtylo veteri) Anno Æræ Chriſtianæ vulgaris currente 1654, tempore matutino, conſpiciendam exſpectavimus: parabam ea quæ huic negotio neceſſaria videbantur, ut, ſi cœlo propitio frui datum fuerit, Eclipſis exſpectata commodè ſpectari poſſit. Cameram nempe curavi probè obſcurandam, ut meræ eſſent tenebræ; in quam per Teleſcopium ſatis limatum Solares radii intromiſſi in adverſâ tabulâ reciperentur, quam ita Teleſcopio accommodaveram, ut, ubi ad Solem illud directum fuerit, hæc ſemper Solari diſco maneat parallela: eodem ipſo inſtrumento uſus, quo ante biennium eodem in loco Eclipſin (quantum per cœlum nubilum tunc licuit) obſervaveram.

Huic

Huic tabellæ, ſive aſſerculo ligneo, chartam affixeram, quæ circulum continebat tantæ magnitudinis ut illum exactè impleret per Teleſcopium intromiſſa Solaris corporis effigies. Hunc circulum (duabus diametris decuſſatim poſitis diviſum, quarum altera lineam verticalem, altera Horizontalem oſtenderet,) ita dividebant alii circuli concentrici ut in quâlibet diametro digiti & digitorum quadrantes diſtinguebantur. Et perpendiculum etiam appenſum erat, cujus umbra moneret ſiquando linea verticalis a debito ſitu deflecteret.

Habui autem obſervationis comites duos egregios viros, Artium Magiſtros, & rerum Mathematicarum peritiſſimos, D. *Richardum Rawlinſon* Collegii Reginalis Socium, & D. *Chriſtophorum Wren* Socium Collegii Omnium-Animarum, quorum etiam alterius ope in ære incidendo uſus ſum.

Ubi dies advenerat, metuebam primo mane ne nubilum cœlum aſpectum Solis penitùs impediret. Sed nubes paulatim diſperſæ, ante Eclipſeos initium, cœlum ſudum oſtendebant, & negotio noſtro ſatis accommodum.

Ipſum Eclipſeos principium non obſervavi, quippe quod paulò citius contigit quàm exſpectaveram; ſed ex ſequentibus obſervationibus aliquammultis ſatis illud colligi poterit: incidiſſe nempe (apud nos) hor. 7. 45′. (circiter) tempore matutino: in limbi Solaris gradu 22° a puncto verticali Occidentem verſus.

Deinde verò phaſes umbræ creſcentes notavi ſex, prout illas habes in Typo delineatas; ut & decreſcentes quindecim.

Maximam verò Solis obſcurationem omnino non vidi, non tam injuriâ Cœli quàm loci ubi fueram impeditus. Camera enim ubi habita eſt obſervatio eum habuit ſitum ut non per unam aliquam feneſtram tota potuit Eclipſis obſervari; ſed principium quidem per unam, finis autem per aliam. Maxima autem omnium obſcuratio tum contigit cum inſtrumentum ab hac ad illam movendo fuimus occupati, dum neutra feneſtra

ſtra ſatis erat commoda: Sol enim ab unâ digreſſus nondum ad alteram pervenerat. Quanta autem illa fuerit, ex reliquis phaſibus collatis ſatis colligitur. Erat nempe illa (juxta eam quam exhibemus obſervationem) decem integris digitis paulò minor. Incidit autem (apud nos) hora 8. 58′½. circiter, paulo ante obſervationem noſtram ſeptimam.

Ubi deniq; Eclipſis ad finem vergebat, curavimus tam momentum exitûs, quam punctum marginis Solaris quod ultimum umbram paſſum eſt ſatis curiosè obſervare. Incidit nempe (apud nos) horâ 10. 14′. (ante meridiem;) in limbi Solaris gradu 43°, a puncto infimo Orientem verſus. Duravit igitur Eclipſis per horas duas integras cum ſemiſſe, circiter.

Quem autem in ſingulis phaſibus ſitum habuerint lucis cornua, & quem Solaris limbi gradum tetigerint, in ipſo quem vides Typo expreſſum habes; ut non ſit opus multis illud verbis explicare. In omnibus autem illis quas notavimus phaſibus; conſenſus ipſe ſatis indicio eſſe videtur, totam obſervationem ſatis accuratè fuiſſe peractam, ſaltem errores ſiqui ſint non adeò magnos eſſe.

Diametrum Solis viſibilem deprehendimus in hac Eclipſi minorem eſſe quàm in eâ quæ accidit duobus abhinc annis, (Martii 29. 1652. ſt. vet.) quod eo ſtatim indicio patuit quòd idem circulus obſervatorius quem tunc adhibui nonniſi in remotiori a Perſpicillo diſtantiâ implebatur.

Diametrum Lunæ viſibilem, quamvis illam exhibeant Tabulæ Diametro Solari paulò majorem, invenimus potius æqualem eſſe, ab eâ ſaltem vix notabili quantitate differre. Quod hoc indicio deprehenſum eſt. Circulos habeam aliquot chartaceos antea paratos, diverſæ paulò ab invicem magnitudinis, circulo obſervatorio (qui diſcum Solarem exhibuit) partim majores partim minores aut æquales; quos ſigillatim umbræ in Solari diſco viſæ applicando illum inveni arcui lu-

cem ab umbra separanti optimè convenire, qui circulo Observatorio congruebat.

Atq; hoc quidem circulo chartaceo usus sum in singulis phasibus observandis. Cùm enim celerior motus umbræ non passus est notabilem moram in unâ aliquâ phasi delineandâ; circulo chartaceo umbræ applicato, per ipsius statim marginem arcus eos plumbo descripsimus quos in ipso Typo vides expressos. Hoc enim pacto, & expeditioni meliùs prospectum, & confusioni cautum, iri judicavi, quam si singulos arcus ternis punctis indicatos circino tandem post observationem peractam delineandos reliquerim.

Cùm autem visibilem Lunæ Diametrum respectu Diametri Solaris paulò minorem nobis apparuisse dictum est quàm indicabant Tabulæ: non tamen propterea Tabulas illas eo nomine suspectas statim insinuo aut erroris incuso; cum & salvâ Tabularum fide satis illud contingere possit. Corpus enim lucidum, dum radiis suis corpus opacum lambit, ipsius marginem ita perstringere solitum est acsi nonnihil inde abraderet, & corpus opacum paulò minus apparere facit quàm revera est. Quod familiari instantiâ contueri licet. Si enim bacillum teres oculum inter & lucernam transversim colloces, ut lucernæ flamma partim supra baculum partim subtùs conspiciatur; videbitur rotundum illud bacillum eò loci ubi radiis perstringitur aliquantò minus esse, quàm alibi ubi radiis flammulæ liberatur; quasi utrinq; aliquid radiis perstringentibus ablatum esset. Quod quidem de corpore Lunari si concedatur, Solem inter & oculum posito; necesse est ut ipsius discus, radiis Solaribus quasi detersus, minor aliquantò appareat, quàm vel revera sit, vel in alio situ videatur esse. Quod quidem animadvertisse, in Solaribus Eclipsibus æstimandis, non levis erit momenti. Hinc enim eveniet ut Eclipses Solares semper videantur paulò minores quàm Luminarium proportio & situs postulant. Et (eâdem

dem de causâ) Eclipses Lunares etiam justo minores apparere possunt, diminuto scilicet umbræ terrestris cono (abrasis quasi lumine Solari ipsius particulis exterioribus) unde necesse erit ut et minuatur Lunaris disci obscuratio. Quantum autem, in utrâq; Eclipsi, hanc ob causam deesse judicandum erit, accuratiori indagine non indignum videatur.

Temporis momenta quod attinet; ea indicio Horologii ambulatorii, singula minuta prima & secunda monstrantis, æstimavi; prout illa habes in adjunctâ Tabellâ indicata. Quamvis enim isthæc automata, utut artificiosè facta, non ita planè æquabili motu procedant ut Mathematicam ἀκρίβειαν attingant; si tamen minuto forsan integro (vel etiam altero) aliquando peccatum fuerit, non eapropter eorum usus esset contemnendus. Sed & altitudinem Centri Solaris aliquoties interim æneo Quadrante observavi, non quidem adeò magno, sed accuratè diviso & fideliter etiam tractato. Ex quibus comparatis liquet, Horologium, in principio Eclipseos, potius sequi justum tempus, sed properanter; in fine verò, præire, sed & segnescere.

Plura temporis mensurandi media non adhibui, partim quòd ad manum alia non erant, partim etiam quòd non totidem adjutores habui, illarum rerum peritos, quot pluribus attenti esse possent.

Totâ Observationis serie sic peractâ: cùm tandem esset ære incidenda, non ullâ placuit emendatione uti, ne correctionis prætextu depravare videar: sed observationem integram, sicut in protographo primitùs depicta fuerat, fideliter in æneam laminam transferre. Schematis tamen totius situm inversum, ex radiorum decussatione ortum, in integrum restituendum duxi, (quod solâ chartæ conversione præstitum est,) quò meliùs apparentiæ cœlesti congrueret. Totum etiam in minorem aliquantò formam redigere coactus sum; quia cir-

culus, quo usus eram, Observatorius ali quantò major fuerat quàm ut unâ paginâ commodè contineri possit.

Centri deniq; Lunaris transitum, per discum Solis, depictum habes; quatenus ex observatorum arcuum centris colligitur. Quæ quamvis linea sit non ita planè æquabilis, quin aliquantulum hinc inde fluctuet; tantillum tamen aberratum est, ut vix majorem ἀκρίβειαν sperare ausus essem; cùm in accuratissimis quas videre contigit Observationibus, non minorem deprehendi centrorum divaricationem, nonnunquam etiam & longè ampliorem; quod & quivis alius deprehendere poterit, cui libet in aliorum Observationibus arcuum observatorum centra examinare. Neq; mirum illud illis videbitur qui rebus hujusmodi sunt exercitati: Nôrunt enim levissimam in observandis umbræ arcubus (præcipuè minoribus) aberrationem, satis notabilem nonnunquam centri divarication em creare posse; præsertim si accedat vel leviuscula instrumenti titubatio, vel perpendiculi a suo situ deflexio: quidquod & ipsum lucis & umbræ confinium non adeò accuratè, quasi lineâ Mathematicâ, determinare datum est, quin aliqua latitudo concedatur sit necesse non nisi conjectantis oculi æstimatione determinanda. Ne autem sit linea planè recta, impedire debent mutata subinde in singulis momentis tam Luminarium Parallaxes quàm Solaris Disci puncta Verticalia.

Tandem præcipuas aliquot phases seorsim placuit in minori formâ describere: non quidem eas ipsas quas in Observationis curriculo notavimus, sed quæ integris potius diametri Solaris digitis respondeant, prout eas ex majori Schemate colligere licuit.

Quis autem fuerit Zodiaci situs in singulis observatis phasibus, nec erat necesse, nec quidem conveniens adnotare; adeóq; nec nodi Ecliptici positionem. Cùm enim Zodiaci ad Horizontem inclinatio non eadem permaneat, sed in singulis

lis ſubinde momentis immutetur; opus eſſet Zodiacum vel non omnino notare, vel toties quot ſunt ipſæ obſervatæ phaſes, unde linearum confuſio nimia oriatur ſit neceſſe. Nec tamen eapropter placuit obſervationis Typum primarium (quem nempe tempore Obſervationis deſcripſimus) immutare, ut omnes obſervatæ phaſes ad unum aliquod perpendiculum reducantur, cujus reſpectu Zodiacus in eodem ſemper perſiſtat ſitu. Sed mallem rem ipſam ſimpliciter ut facta fuerat exhibere, et ejuſmodi calculum ſeu reſtitutionem cujuſvis arbitrio permittere.

Atq; hæc ſunt quæ de præſenti Obſervatione monenda duxi. Reliqua ex ipſa Typi, qui ſequitur, inſpectione ſatis.

Obſervatio

Observatio Eclipseos Solaris

OXONII Habita;

Anno Æræ Christianæ 1654. *Die* 2 *Augusti st. vet.*
Elevatio Poli 51°, 46′ *circiter.*

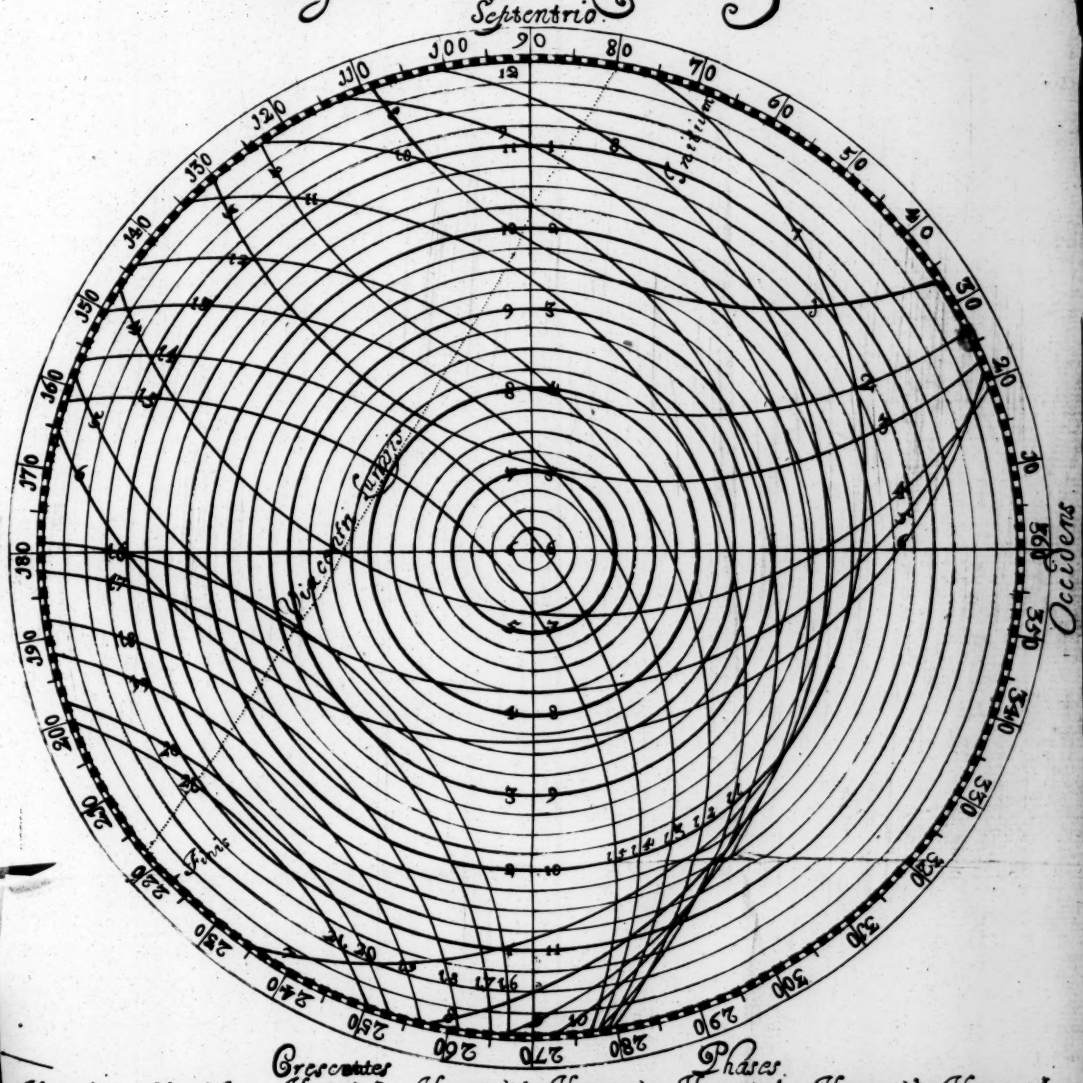
Phasium observatarum ordo.		Digiti Ecliptici.	Tempus secundum Horologiū ambulatorium. Hor.	′	″	Altitudines centri Solaris. Gr:	Mi:	Tempus ex altitudine Solis eruitum Hor:	1.	11.
	1	* $2\frac{2}{12}$ D.	8	2	20.					
	2	4 circ.	8.	9.	30.					
	3	5 circ.	8.	15.	23.					
	4	$6\frac{2}{48}$	8.	22.	0.	33.	34′	8.	23.	7.
	5	$7\frac{1}{24}$	8.	28.	29.					
	6	$8\frac{1}{12}$	8.	34.	24.					
	7	$9\frac{2}{12}$	8.	39.	31.					
	8	$9\frac{2}{12}$	8.	59.	42.					
	9	$9\frac{2}{12}$	9.	4.	50.					
	10	$8\frac{2}{12}$	9.	8.	34.					
	11	$8\frac{1}{12}$	9.	12.	45.					
	12	$7\frac{2}{12}$	9.	15.	15.	40.	34.	9.	13.	31.
	13	$6\frac{2}{24}$	9.	17.	29.					
	14	$6\frac{1}{12}$	9.	23.	54.					
	15	$5\frac{1}{12}$	9.	28.	37.					
	16	$3\frac{1}{12}$	9.	33.	18.					
	17	3 circ.	9.	37.	7.					
	18	$2\frac{1}{12}$	9.	42.	30.	43.	45.	9.	38.	53.
	19	$1\frac{2}{12}$	9.	53.	17.					
	20	$1\frac{1}{12}$	9.	56.	24.					
	21	$1\frac{1}{12}$	9.	59.	14.					
	22	Finis.	10.	2.	57.					
			10.	6.	15.					
			10.	7.	50.					
			10.	14.	0.					
			10.	20.	35.	47.	57.	10.	17.	31.

Crescentes

Decrescentes

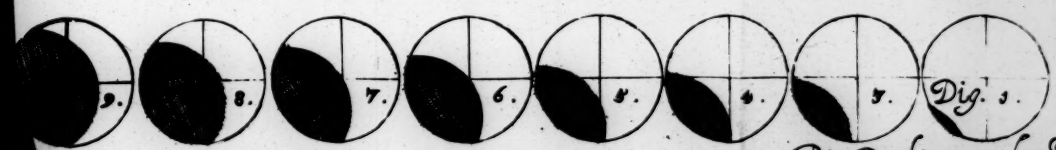
* *Paulo major quam in Typo.*

Typus Eclipseos Solaris, ut apparuit OXONII 2. Augusti, 1654. ante meridiem



Phases Crescentes

Phases Decrescentes.



Ri: Rawlinson cælavit

22	Finis.	10.			47.	57.	10.	17.	31.
		10.	20.	35.					

Speciales aliquot Phaſes ad analogiam Schematis Univerſalis.

Creſcentes.

Initium.	Hor:	Min:
	7.	45.
1 Dig.	7.	51.
2 Dig.	7.	57.
3 Dig.	8.	3½.
4 Dig.	8.	10.
5 Dig.	8.	16½.
6 Dig.	8.	23.
7 Dig.	8.	29½.
8 Dig.	8.	36½.
9 Dig.	8.	45.
10 Fere.	8.	58.

Decreſcentes.

	Hor:	Min:
9 Dig.	9.	11.
8 Dig.	9.	19½.
7 Dig.	9.	26½.
6 Dig.	9.	34.
5 Dig.	9.	41.
4 Dig.	9.	48.
3 Dig.	9.	55.
2 Dig.	10.	1½.
1 Dig.	10.	8.
Finis.	10.	14.

FINIS.